

Informatique 4 : Introduction

Introduction aux graphes

2

Définition : Un graphe est un ensemble de points appelés **sommets** et un ensemble de lignes appelées **arêtes**, chacune d'entre elles reliant une paire de points ou un seul point à elle-même.

Mathématiquement, le graphe G est une paire ordonnée de (V, E)

Chaque arête e_{ij} est associée à une paire ordonnée de sommets (V_i, V_j) .

Introduction aux graphes

3

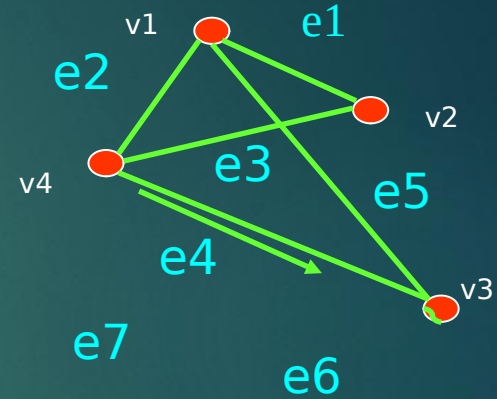
Dans la figure G, le graphe a 4 sommets, à savoir

v_1, v_2, v_3, v_4 & 7 arêtes

A savoir $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ Alors $e_1=(v_1, v_2)$

Il en va de même pour les autres bords.

En bref, nous pouvons représenter $G=(V,E)$ où $V=(v_1, v_2, v_3, v_4)$ & $E=(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$



Graphique G

Boucles et bords parallèles

Définition : Si les sommets d'extrémité V_i & V_j d'une arête e_{ij} sont identiques, alors l'arête e_{ij} est appelée **boucle automatique**.

Par exemple, dans le graphe G , l'arête $e_6 = (v_3, v_3)$ est une boucle automatique.

Définition : Si plusieurs arêtes sont associées à une paire de sommets donnée, ces arêtes sont appelées **arêtes parallèles ou multiples**.

Par exemple, dans le graphe G , e_4 & e_7 a (v_3, v_4) sont appelées arêtes parallèles.

Historique



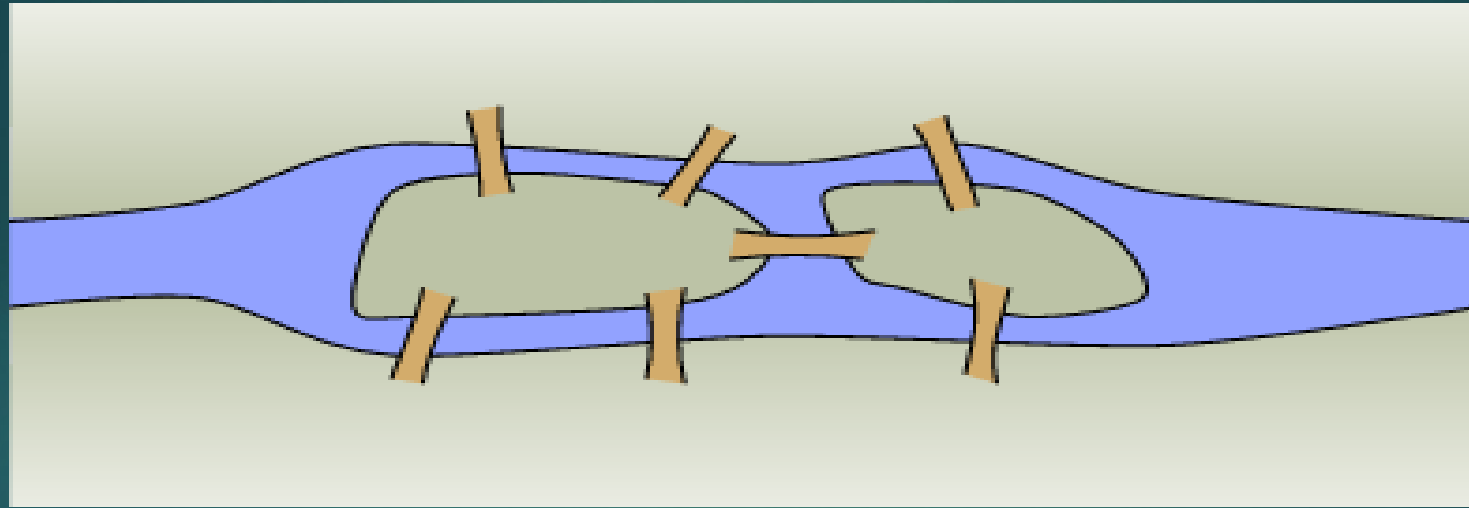
- Au début du 18e siècle, il existait une énigme mathématique récréative appelée le problème du pont de Königsberg. La solution de ce problème, pourtant simple, a ouvert le monde à un nouveau domaine des mathématiques appelé théorie des graphes. Dans le monde d'aujourd'hui, la théorie des graphes s'est étendue au-delà des mathématiques pour entrer dans notre vie quotidienne sans même que nous nous en rendions compte.

-

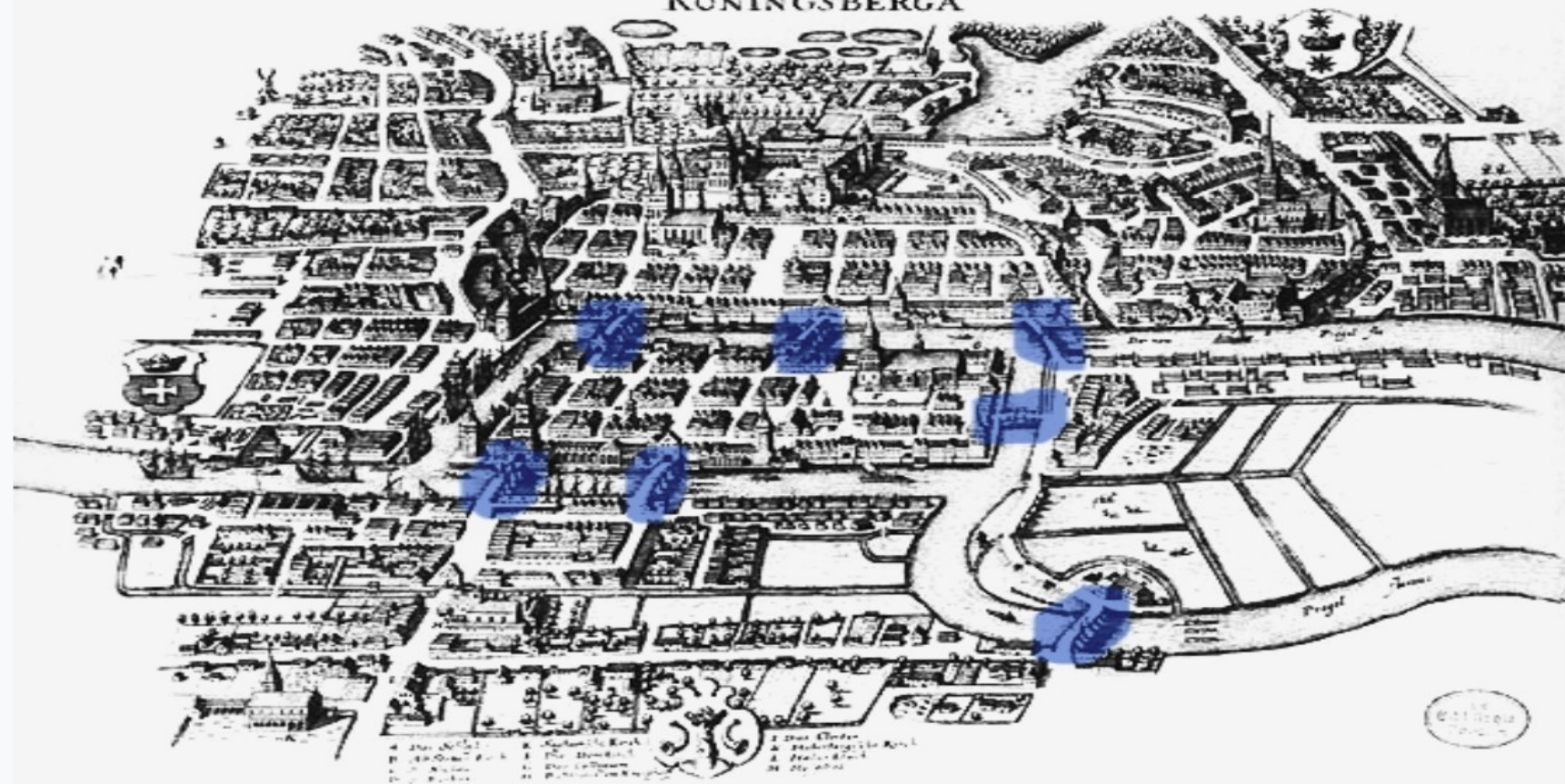
L'origine de la théorie des graphes

- Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad, Russie) était une ville de l'ancien royaume de Prusse qui s'étendait de part et d'autre de la rivière Pregel. La ville avait deux îles qui étaient reliées au continent par des ponts. La plus petite île était reliée par deux ponts de part et d'autre de la rivière, tandis que la plus grande île n'était reliée que par un seul. En outre, un seul pont reliait les deux îles. Vous pouvez voir la disposition des ponts dans l'image ci-dessous.

- 
- A l'époque d'Euler, dans la ville de Königsberg en Prusse, il y avait une rivière contenant deux îles. Les îles étaient reliées aux rives du fleuve par sept ponts (voir ci-dessous). Les ponts étaient très beaux et, pendant leurs jours de congé, les habitants de la ville passaient du temps à se promener sur les ponts. Au fil du temps, une question s'est posée : est-il possible de planifier une promenade de manière à traverser chaque pont une fois et une seule ? Euler a pu répondre à cette question. L'êtes-vous ?



KONINGSBERGA



- 
- Maintenant, imaginez que vous êtes un touriste et que vous voulez traverser les 7 ponts car ils constituent l'attraction principale de la ville. Cependant, vous êtes un peu paresseux et ne voulez pas marcher trop longtemps. Vous ne voulez donc pas traverser le même pont plus d'une fois. Existe-t-il un chemin dans la ville qui permette de le faire ? En règle générale, vous ne pouvez traverser la rivière que par les ponts, donc pas de baignade. Comment résoudriez-vous ce problème ?

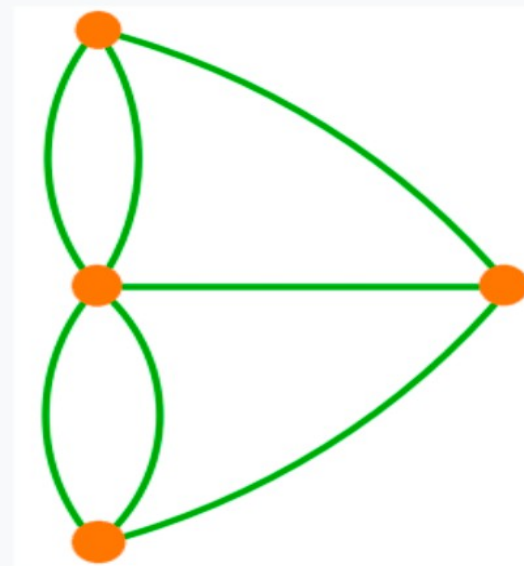
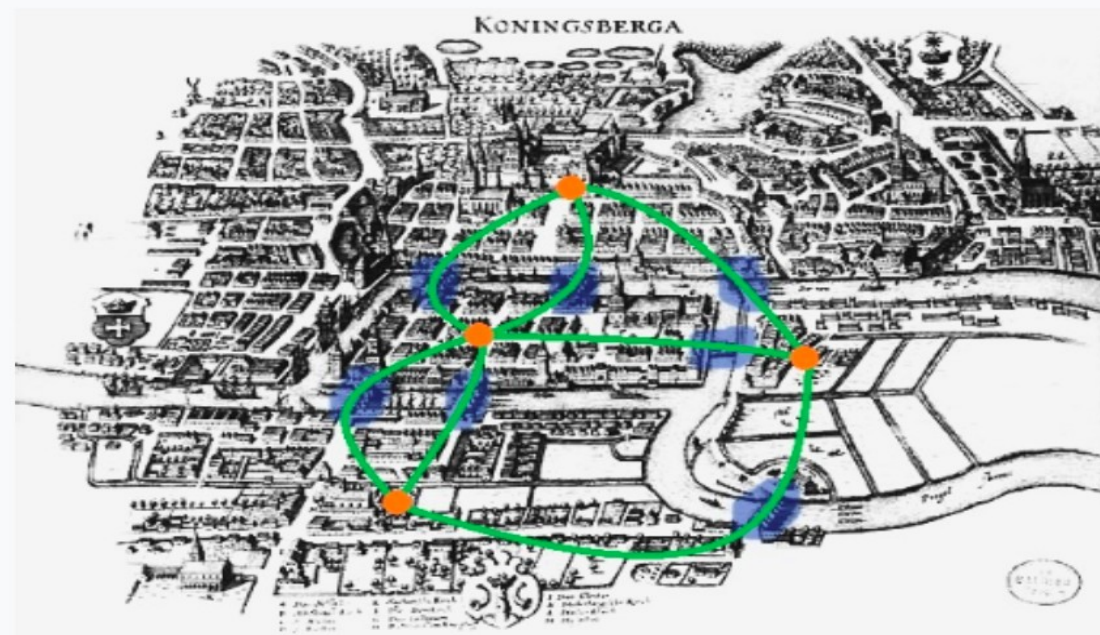
-

- 
- À première vue, le problème semble simple à résoudre. Il suffit d'essayer quelques chemins et vous arriverez à la solution. Cependant, quel que soit le nombre de chemins que vous essayez, vous ne trouverez pas de solution. Leonhard Euler, un célèbre mathématicien, s'en est rendu compte et a expliqué pourquoi il était impossible de faire ce chemin à travers la ville.

-

- 
- Tout d'abord, il a compris que la façon dont vous vous déplacez à l'intérieur de la ville n'a pas d'importance. La seule partie importante à considérer pour le problème était les connexions entre les différentes masses terrestres. Il a dessiné des points pour représenter les masses terrestres et des lignes reliant ces points pour représenter les ponts (comme on le voit sur l'image ci-dessous). L'emplacement des points et la forme des lignes ne sont pas pertinents pour le problème, mais seulement leur relation. Au final, il a obtenu une abstraction du problème avec seulement des points et des lignes, que l'on appelle maintenant un graphe.

- 
- La théorie des graphes est un domaine relativement récent des mathématiques, étudié pour la première fois par le super célèbre mathématicien Leonhard Euler en 1735. Depuis lors, elle est devenue un outil puissant utilisé dans presque toutes les branches de la science et constitue actuellement un domaine actif de la recherche mathématique.
 -
 - Le problème ci-dessus, connu sous le nom des Sept Ponts de Königsberg, est le problème qui a inspiré la théorie des graphes. Considérons un problème "différent" : le dessin ci-dessous représente quatre points reliés par des lignes. Est-il possible de tracer sur chaque ligne une fois et une seule (sans lever votre crayon, en commençant et en terminant sur un point) ?
 -



- 
- Deuxièmement, il pensait que pour traverser une masse continentale, il fallait y entrer par un pont et en sortir par un autre pont. Cela signifie que le point représentant cette masse terrestre doit être relié par deux lignes pour représenter la ligne d'entrée et de sortie. Plus généralement, le point peut avoir un nombre pair quelconque de lignes comme connexions. Cela ne s'applique pas nécessairement à deux points, qui représentent la première et la dernière masse continentale du chemin.

-

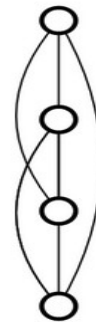
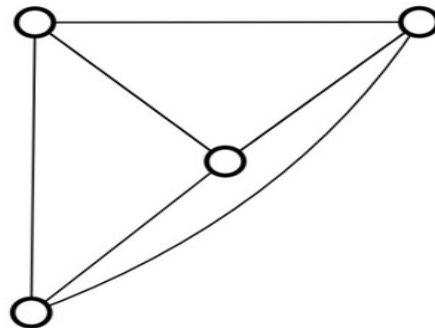
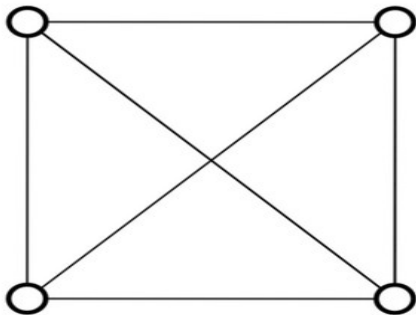
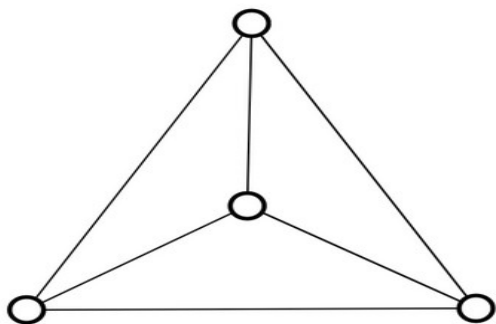
-

- 
- Ces points peuvent avoir un nombre impair de lignes les reliant puisque vous ne pouvez sortir que par le premier point et entrer que par le dernier point. En comptant les lignes reliant chaque point du problème du pont de Königsberg, on peut voir que toutes les masses terrestres ont un nombre impair de connexions. Cela prouve qu'il est impossible de tracer un chemin qui passe par tous les ponts.
 - Euler a changé la façon de résoudre les problèmes. Il a reconnu que le problème ne consistait pas à mesurer et à calculer la solution, mais à trouver la géométrie et les relations qui la sous-tendent. En abstrayant le problème, il a lancé le domaine de la théorie des graphes et sa solution est devenue le premier théorème de ce domaine. Depuis lors, la théorie des graphes s'est développée non seulement d'un point de vue mathématique, mais aussi dans de nombreux autres domaines tels que la physique, la biologie, la linguistique, les sciences sociales, l'informatique, etc.

Qu'est-ce que la théorie des graphes ?

- La théorie des graphes est l'étude des relations entre les objets. Ces objets peuvent être représentés par des points (comme les masses terrestres ci-dessus) et leurs relations par des lignes (comme les ponts). Les points sont appelés sommets ou nœuds, et les lignes sont appelées arêtes ou liens. La connexion de tous les sommets et de toutes les arêtes s'appelle un graphique et peut être représentée sous forme d'image, comme celles ci-dessous :

-



- 
- L'une des propriétés les plus importantes des graphes est qu'ils ne sont que des abstractions du monde réel. Cela permet de représenter les graphiques de nombreuses manières différentes, qui sont toutes correctes. Par exemple, tous les graphes ci-dessus sont visuellement très différents les uns des autres ; cependant, ils représentent tous les mêmes relations et constituent donc tous le même graphe. Vous pouvez le vérifier en comptant le nombre d'arêtes que possède chaque sommet.

- 
- Les graphes peuvent être divisés en de nombreuses catégories différentes en fonction de leurs propriétés. Les catégories les plus courantes sont les graphes dirigés et non dirigés. Les graphes dirigés ont des arêtes avec des orientations spécifiques, normalement représentées par une flèche. Par exemple, dans un graphe représentant une recette de gâteau, chaque sommet correspond à une étape différente de la recette et les arêtes représentent la relation entre ces étapes. Vous ne pouvez mettre le gâteau au four qu'après avoir mélangé les ingrédients ; il y a donc une arête dirigée de l'étape du mélange à celle de la cuisson. Les graphes non dirigés ont des arêtes symétriques, comme ceux illustrés précédemment. Un autre exemple est le graphe d'un réseau social, où les sommets représentent des personnes et les arêtes relient les personnes qui ont une relation. Ces relations vont dans les deux sens.

- 
- Une autre caractéristique importante est que les sommets ou les arêtes peuvent avoir des poids ou des étiquettes. Supposons que vous construisiez un graphe à partir d'une série d'entrepôts et de magasins dans une ville afin d'optimiser l'approvisionnement des magasins. Vous pouvez avoir deux types de sommets, entrepôts et magasins, et les arêtes qui les relient peuvent être pondérées soit par la distance physique entre les deux emplacements, soit par le coût de déplacement du produit d'un emplacement à l'autre. Les poids et les étiquettes sont très importants lorsque l'on utilise la théorie des graphes dans des applications réelles, car c'est un moyen d'ajouter de la complexité au modèle de graphe simple.
 - Pour l'instant, j'ai décrit ce qu'est un graphe et ses propriétés, mais pas comment utiliser la théorie des graphes pour résoudre des problèmes. Il est intéressant de noter qu'une fois abstrait en un graphe, le problème tombe dans quelques catégories fondamentales, comme la recherche de chemin, la coloration de graphe, le calcul de flux et plus encore. Dans la section suivante, j'aborderai certaines de ces catégories, des problèmes de la vie réelle qui en font partie et la manière d'abstraire les problèmes en graphes.

Quelles sont les applications réelles de la théorie des graphes ?

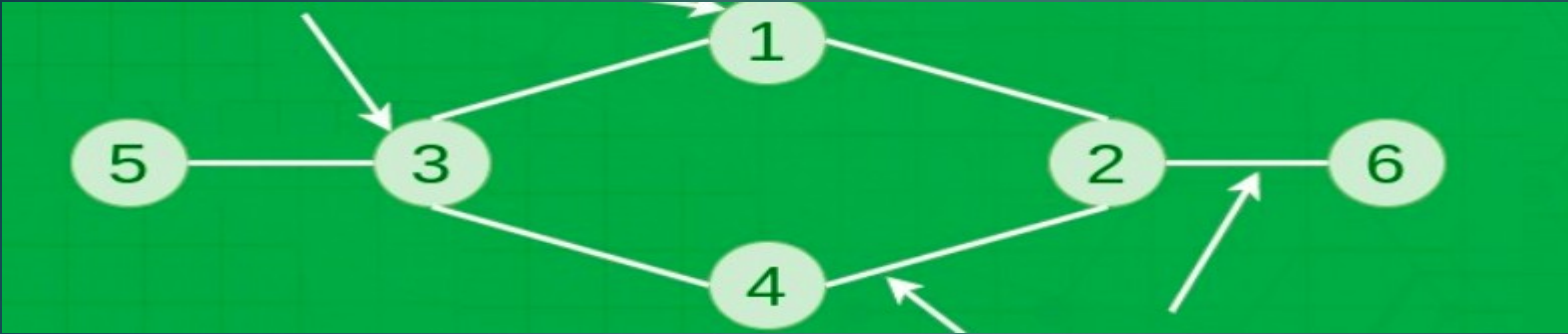
- Dans cette section, je présente 5 problèmes différents de la théorie des graphes avec des exemples concrets. Le calcul de leur solution peut être fait avec une variété d'algorithmes que j'encourage le lecteur à rechercher car ils deviennent parfois très complexes pour ce blog d'introduction. De plus, les solutions de ces problèmes peuvent ne pas être uniques ou exactes. Les algorithmes de la théorie des graphes dépendent de la taille et de la complexité du graphe ; cela signifie que certaines solutions peuvent n'être qu'une très bonne approximation de la solution exacte. Plus encore, certains problèmes n'ont même pas été résolus, et les approximations sont donc la meilleure issue.

Qu'est-ce qu'un graphe dans la structure de données et les algorithmes

Un graphe est une structure de données non linéaire composée de sommets et d'arêtes. Les sommets sont parfois appelés nœuds et les arêtes sont des lignes ou des arcs qui relient deux nœuds du graphe. Plus formellement, un graphique est composé d'un ensemble de sommets (V) et d'un ensemble d'arêtes (E). Le graphe est désigné par $G(E, V)$.

-

- Nœud ou sommet



• Arrête

Composants d'un graphe

Sommets : Les sommets sont les unités fondamentales du graphe. Parfois, les sommets sont également appelés vertex ou nœuds. Chaque nœud/vertex peut être étiqueté ou non.

- Arêtes : Les arêtes sont dessinées ou utilisées pour connecter deux nœuds du graphe. Il peut s'agir d'une paire ordonnée de nœuds dans un graphe dirigé. Les arêtes peuvent relier deux nœuds de n'importe quelle manière possible. Il n'y a pas de règles. Parfois, les arêtes sont également appelées arcs. Chaque arête peut être étiquetée/non étiquetée.

-

-

Importance des graphes

- Les graphes sont utilisés pour résoudre de nombreux problèmes de la vie réelle. Les graphes sont utilisés pour représenter des réseaux. Les réseaux peuvent inclure des chemins dans une ville, un réseau téléphonique ou un réseau de circuits. Les graphes sont également utilisés dans les réseaux sociaux comme linkedIn, Facebook. Par exemple, dans Facebook, chaque personne est représentée par un sommet (ou nœud). Chaque nœud est une structure et contient des informations comme l'identifiant de la personne, son nom, son sexe, son lieu, etc.

-

Types de graphes avec exemples

- Un graphe est une structure de données non linéaire composée de nœuds et d'arêtes. Les nœuds sont parfois appelés sommets et les arêtes sont des lignes ou des arcs qui relient deux nœuds du graphe. Plus formellement, un graphe peut être défini comme suit : un graphe constitué d'un ensemble fini de sommets (ou nœuds) et d'un ensemble d'arêtes qui relient une paire de nœuds.

Types de graphes :

- 1. Graphes finis

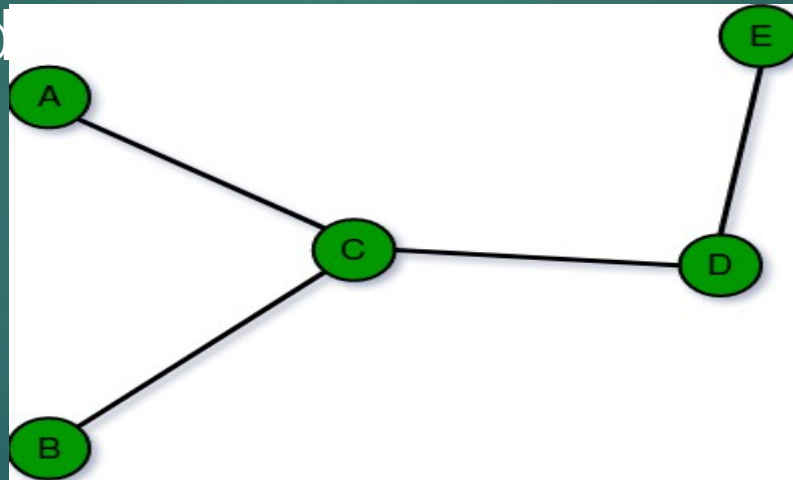
-

- Un graphe est dit fini s'il possède un nombre fini de sommets et un nombre fini d'arêtes.

-

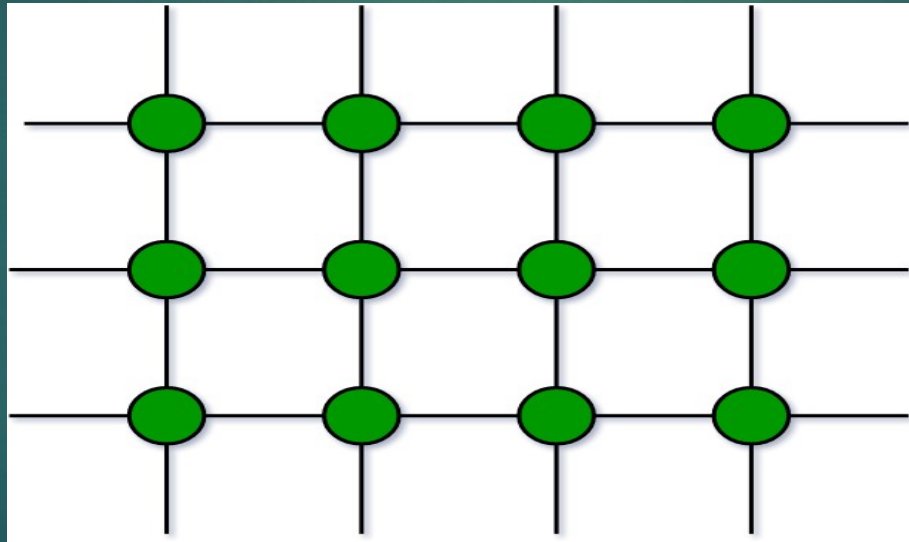
-

-



2. Graphe infini :

- Un graphe est dit infini s'il possède un nombre infini de sommets ainsi qu'un nombre infini d'arêtes.

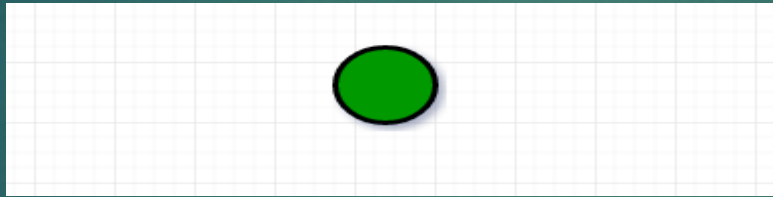


3. Graphique trivial

-

Un graphe est dit trivial si un graphe fini ne contient qu'un seul sommet et aucune arête.

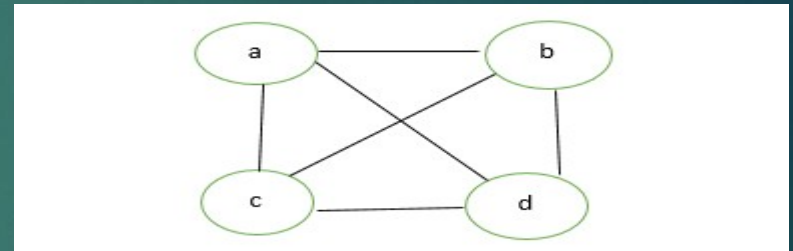
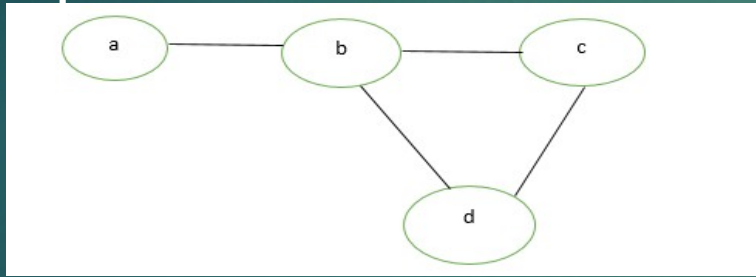
-



-

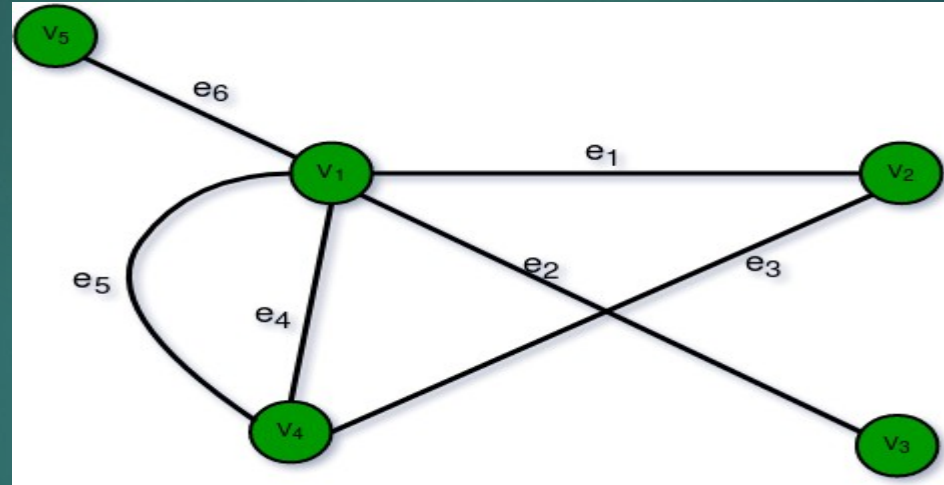
4. Graphe simple

- Un graphe simple est un graphe qui ne contient pas plus d'une arête entre la paire de sommets. Une simple voie ferrée reliant différentes villes est un exemple de graphe simple.



5. Multigraph

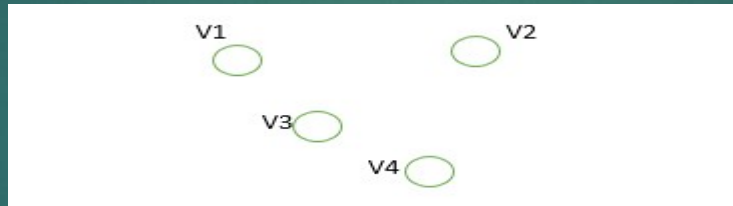
- Tout graphe qui contient quelques arêtes parallèles mais qui ne contient pas d'auto-boucle est appelé **un multi-graphe**. Par exemple, une carte routière.
- **Arêtes parallèles** : Si deux sommets sont reliés par plus d'une arête, ces arêtes sont appelées arêtes parallèles, c'est-à-dire plusieurs routes mais une seule destination.
- **Boucle** : Une arête d'un graphe qui part d'un sommet et se termine au même sommet est appelée une boucle ou une auto-boucle.
-
-



6. Graphe nul

Un graphe d'ordre n et de taille zéro est un graphe où il n'y a que des sommets isolés et où aucune arête ne relie une paire de sommets.

-
-

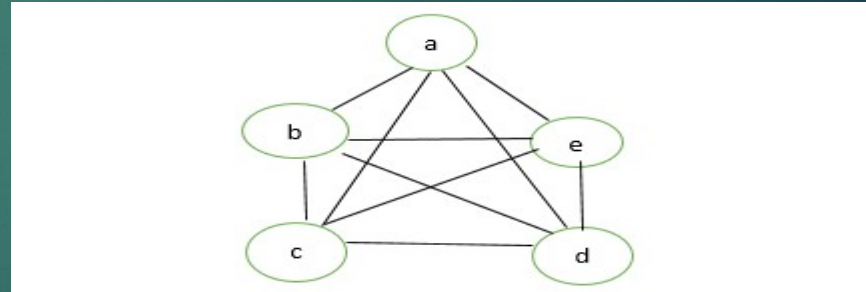
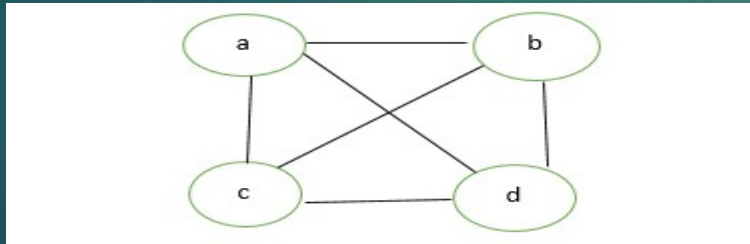


L'ordre d'un graphe

- L'ordre d'un graphe est le nombre de sommet du graphe.
-
- Remarque : un sommet peut ne pas être en relation avec les autres sommets du graphe.
- -Un arc est un couple (x,y) formé de deux sommets en relation dans un graphe orienté. L'arc se symbolise par une fléch
- -un arête est le nom donné par un arc dans un graphe non orienté et symbolisée par un tiret.

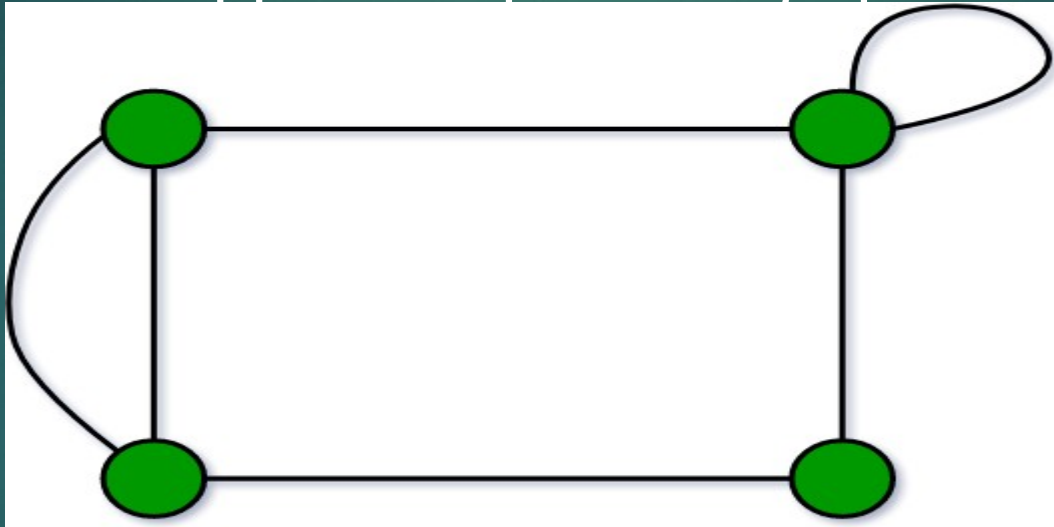
7. Graphe complet

- Un graphe simple avec n sommets est appelé graphe complet si le degré de chaque sommet est $n-1$, c'est-à-dire qu'un sommet est attaché avec $n-1$ arêtes ou le reste des sommets du graphe.



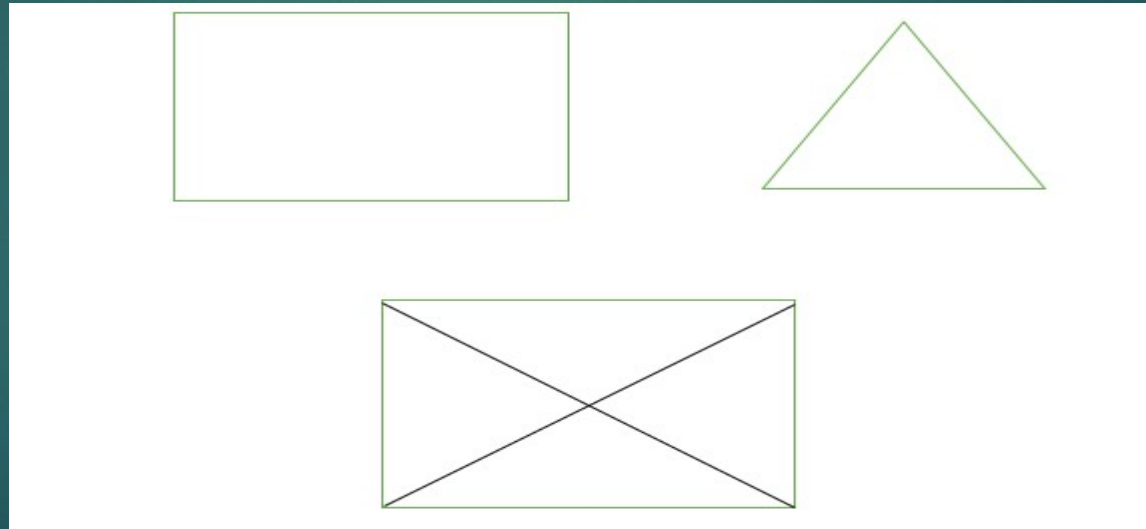
8. Pseudo-graphe

Un graphe G avec une auto-boucle et quelques arêtes multiples est appelé un pseudo-graphe.



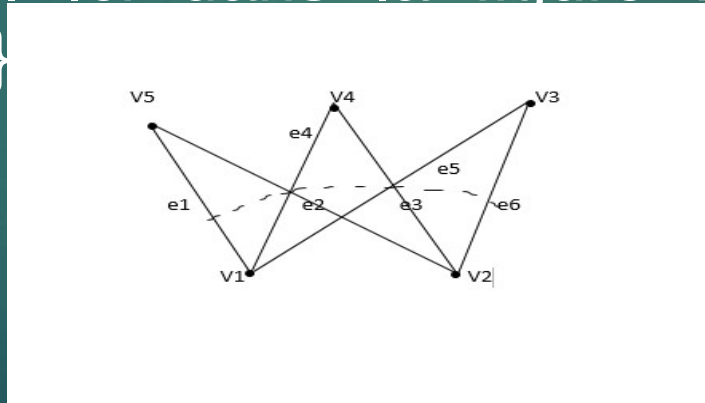
9. Graphique régulier

- Un graphe simple est dit régulier si tous les sommets du graphe G sont de même degré. Tous les graphes complets sont réguliers mais l'inverse n'est pas possible.



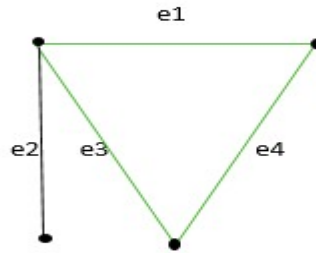
10. Graphe bipartite

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti si son ensemble de sommets $V(G)$ peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints non vides. $V_1(G)$ et $V_2(G)$ de telle sorte que chaque arête e de $E(G)$ a une extrémité dans $V_1(G)$ et une autre extrémité dans $V_2(G)$. La partition $V_1 \cup V_2 = V$ est appelée Bipartite de G . Ici dans la figure : $V_1(G) = \{V_5, V_4, V_3\}$ et $V_2(G) = \{V_1, V_2\}$



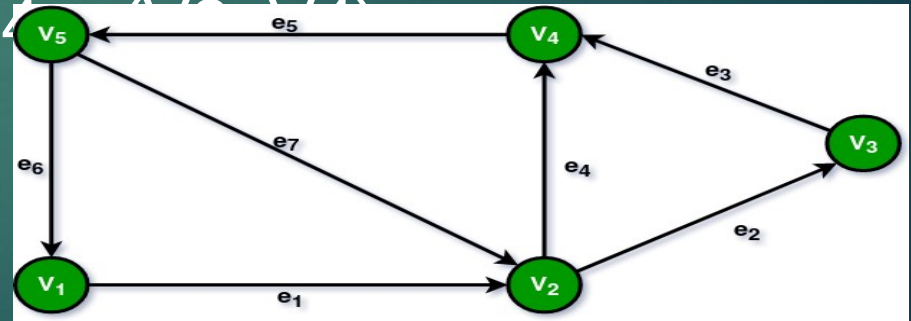
11. Graphique étiqueté

- Si les sommets et les arêtes d'un graphe sont étiquetés avec un nom, une date ou un poids, on l'appelle un graphe étiqueté. Il est également appelé graphe pondéré.



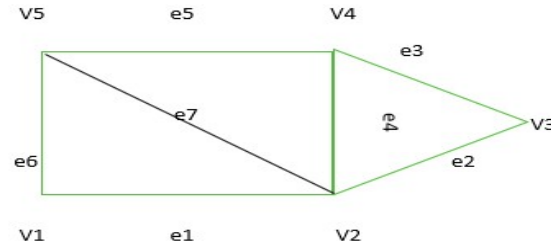
12. Graphe Digraphe

- Un graphe $G = (V, E)$ avec un mappage f tel que chaque arête se mappe sur une paire ordonnée de sommets (V_i, V_j) est appelé un digraphe. Il est également appelé graphe dirigé. La paire ordonnée (V_i, V_j) signifie une arête entre V_i et V_j avec une flèche dirigée de V_i à V_j . Ici, dans la figure : $e_1 = (V_1, V_2)$ $e_2 = (V_2, V_3)$ $e_3 = (V_3, V_4)$ $e_4 = (V_2, V_4)$ $e_5 = (V_4, V_5)$ $e_6 = (V_5, V_1)$ $e_7 = (V_5, V_2)$



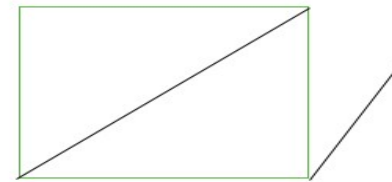
13. Sous-graphe

- Un graphe $G_1 = (V_1, E_1)$ est appelé un sous-graphe d'un graphe $G(V, E)$ si $V_1(G)$ est un sous-ensemble de $V(G)$ et $E_1(G)$ est un sous-ensemble de $E(G)$ tel que chaque arête de G_1 a les mêmes sommets d'extrémité que dans G .

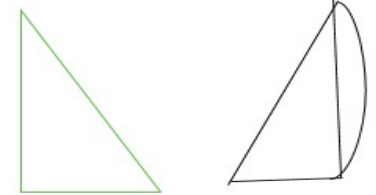


14. Graphe connecté ou déconnecté :

Un graphe G est dit connecté si toute paire de sommets (V_i, V_j) d'un graphique G est atteignable l'une de l'autre. Ou encore, un graphe est dit connecté s'il existe au moins un chemin entre chaque paire de sommets du graphe G , sinon, il est déconnecté. Un graphe nul à n sommets est un graphe déconnecté constitué de n composantes. Une composante est constituée d'un



(a)

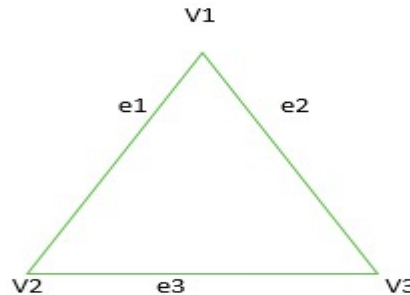


(b)

15. Graphe cyclique

- Un graphe G constitué de n sommets et $n \geq 3$, c'est-à-dire $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ et des arêtes $(V_1, V_2), (V_2, V_3), (V_3, V_4), \dots, (V_n, V_1)$ est appelé graphe cyclique.

-
-



16. Types de sous-graphes



Sous-graphe à sommets disjoints : On dit que deux graphes quelconques $G1 = (V1, E1)$ et $G2 = (V2, E2)$ sont disjoints au niveau des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ si l'intersection $V1(G1)$ et $V2(G2)$ est nulle. Dans la figure, il n'y a pas de sommet commun entre $G1$ et $G2$.

- **Sous-graphe à arêtes disjointes** : Un sous-graphe est dit disjoint si l'intersection $E1(G1)$ et $E2(G2)$ est nulle. Dans la figure, il n'y a pas d'arête commune entre $G1$ et $G2$.

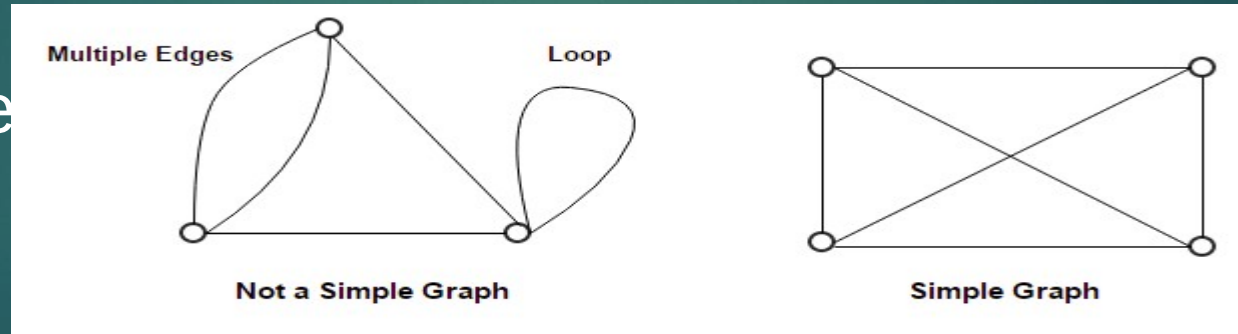
16. Types de sous-graphes

- Remarque : un sous-graphe à sommets disjoints peut avoir des sommets en commun mais un graphe à sommets disjoints ne peut pas avoir d'arête commune, donc le sous-graphe à sommets disjoints sera toujours un sous-graphe à sommets disjoints.

Graphe simple

- Un graphe simple est un graphe non orienté sans arêtes parallèles et sans boucles.
- Un graphe simple qui a n sommets, le degré de chaque sommet est au plus égal à $n - 1$.

- Exemple

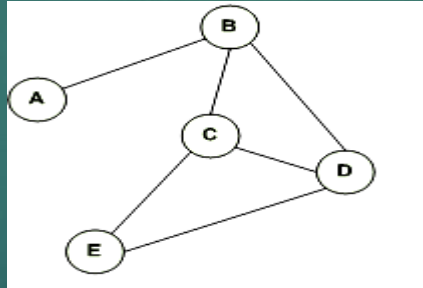


- 
- Dans l'exemple ci-dessus, le premier graphe n'est pas un graphe simple car il a deux arêtes entre les sommets A et B et il a également une boucle.
 -
 - Le deuxième graphe est un graphe simple car il ne contient pas de boucle ni d'arêtes parallèles.

Graphique non dirigé

Un graphe non dirigé est un graphe dont les arêtes ne sont pas dirigées.

- Exemple
-

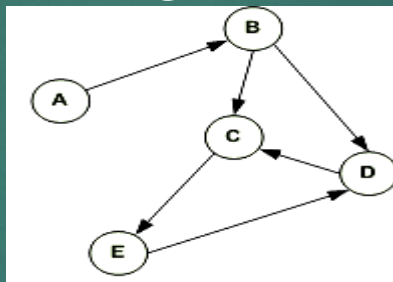


Dans le graphe ci-dessus, comme il n'y a pas d'arêtes dirigées, il s'agit d'un graphe non dirigé.

Graphique dirigé

Un graphe dirigé est un graphe dans lequel les arêtes sont dirigées par des flèches.

- Les graphes dirigés sont également connus sous le nom de digraphes.
- Exemple

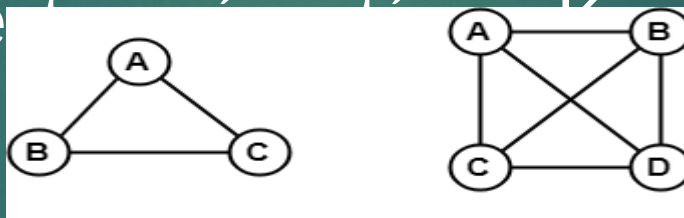


Dans le graphique ci-dessus, chaque arête est dirigée par la flèche. Une arête dirigée a une flèche de A à B, ce qui signifie que A est lié à B, mais que B n'est pas lié à A.

Graphique complet

- Un graphe dans lequel chaque paire de sommets est reliée par exactement une arête est appelé graphe complet. Il contient toutes les arêtes possibles.
- Un graphe complet avec n sommets contient exactement $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes et est noté K_n .

- Exemple

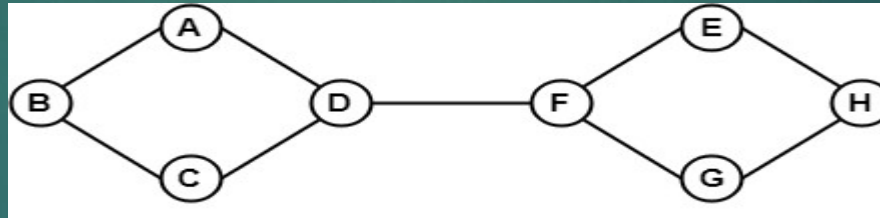


-

Dans l'exemple ci-dessus, puisque chaque sommet du graphe est relié à tous les autres sommets par exactement une arête, les deux graphes sont des graphes complets.

Graphe connecté

- Un graphe connecté est un graphe dans lequel on peut visiter de n'importe quel sommet à n'importe quel autre sommet. Dans un graphe connecté, il existe au moins une arête ou un chemin entre chaque paire de sommets.
- Exemple

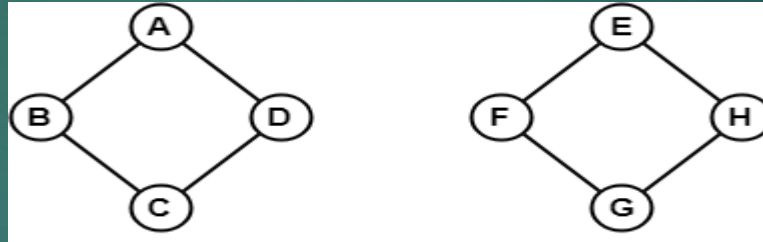


Dans l'exemple ci-dessus, nous pouvons passer de n'importe quel sommet à n'importe quel autre sommet. Cela signifie qu'il existe au moins un chemin entre chaque paire de sommets, ce qui en fait un graphe connecté.

Graphique déconnecté

- Un graphe déconnecté est un graphe dans lequel il n'existe pas de chemin entre chaque paire de sommets.

- Exemple



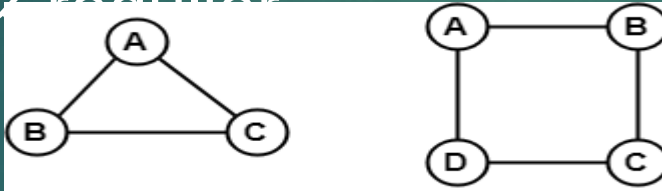
Le graphe ci-dessus est constitué de deux composantes indépendantes qui sont déconnectées. Puisqu'il n'est pas possible de se rendre des sommets d'une composante aux sommets des autres composantes, il s'agit d'un graphe déconnecté.

Graphique régulier

Un graphe régulier est un graphe dans lequel le degré de tous les sommets est le même.

- Si le degré de tous les sommets est égal à k , on parle alors de graphe k -régulier.

- Exemple



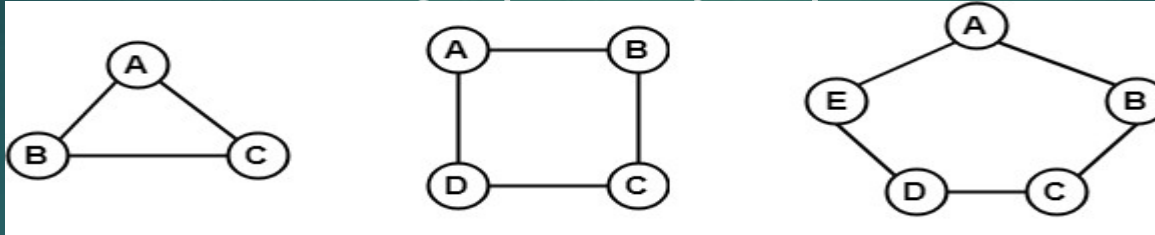
Dans l'exemple ci-dessus, tous les sommets ont un degré 2. Par conséquent, on l'appelle un graphe régulier de degré 2.

Graphique cyclique

Un graphe avec " n " sommets (où $n \geq 3$) et " n " arêtes formant un cycle de " n " avec toutes ses arêtes est appelé graphe cyclique.

- Un graphe contenant au moins un cycle est appelé graphe cyclique.
- Dans le graphe cyclique, le degré de chaque sommet est de 2.
- Le graphe cyclique qui a n sommets est désigné par C_n .
- Exemple 1

- Dans l'exemple ci-dessus, tous les sommets ont un degré 2. Ils sont donc tous des graphes cycliques.

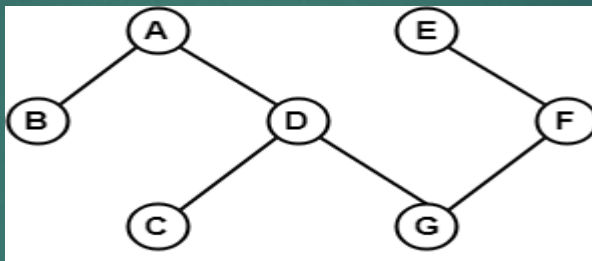


- Exemple 2
- Puisque le graphe ci-dessus contient deux cycles, il s'agit d'un graphe cyclique.

Graphique acyclique

- Un graphe qui ne contient aucun cycle est appelé graphe acyclique.

- Exemple



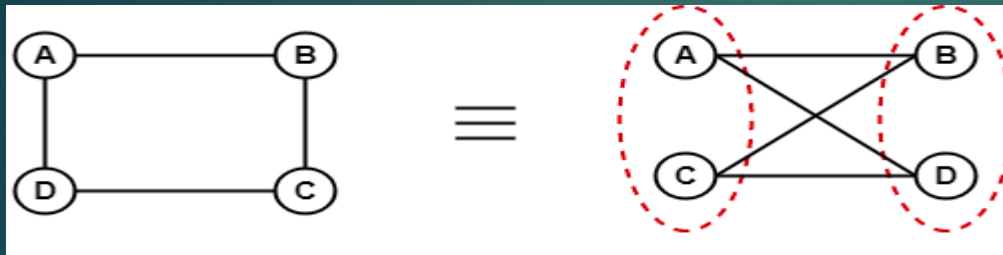
Puisque le graphe ci-dessus ne contient aucun cycle, il s'agit d'un graphe acyclique.

Graphe bipartite

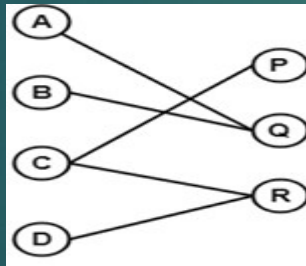


Un graphe biparti est un graphe dans lequel l'ensemble des sommets peut être divisé en deux ensembles de telle sorte que les arêtes ne vont qu'entre les ensembles, et non à l'intérieur de ceux-ci.

- Un graphe $G (V, E)$ est appelé graphe biparti si son ensemble de sommets $V(G)$ peut être décomposé en deux sous-ensembles disjoints non vides $V_1(G)$ et $V_2(G)$ de telle sorte que chaque arête $e \in E(G)$ a son premier joint dans $V_1(G)$ et son autre premier point dans $V_2(G)$.
- La partition $V = V_1 \cup V_2$ est connue sous le nom de bipartition de G .
- Exemple 1



Exemple 2



Graphe bipartite complet

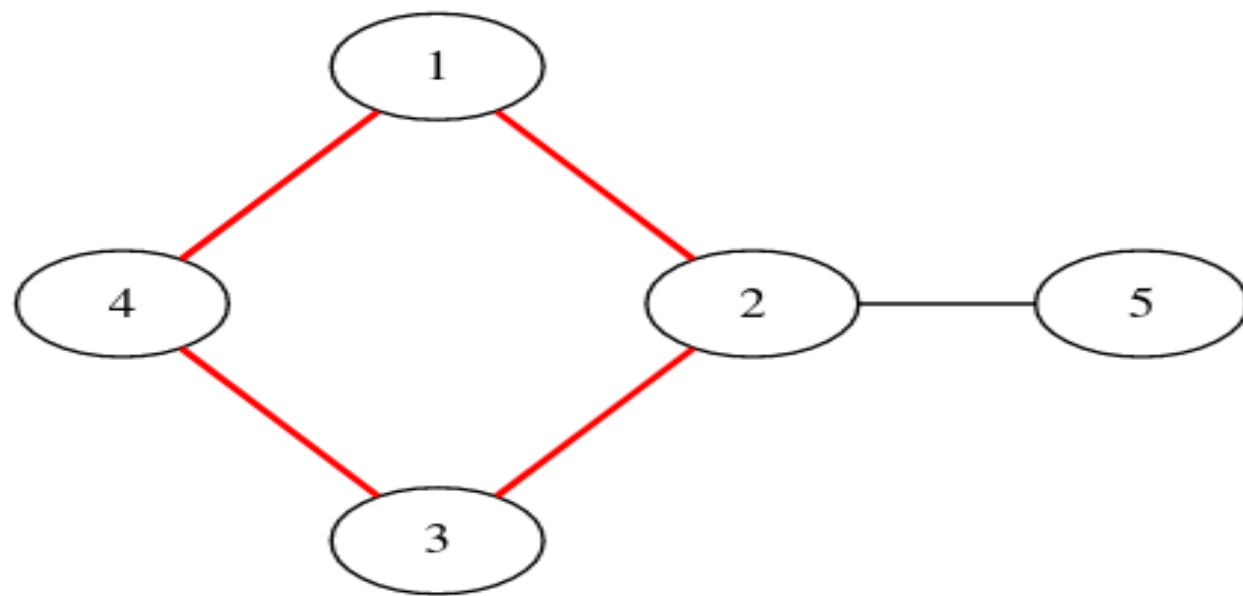
- Un graphe biparti complet est un graphe biparti dans lequel chaque sommet du premier ensemble est relié à chaque sommet du second ensemble par exactement une arête.
- Un graphe biparti complet est un graphe biparti qui est complet.

- **Exercice**

- -Donnez un graphe simple, sans boucle et non pondéré contenant un chemin de taille 5.
- -Donnez un graphe simple, sans boucle et non pondéré contenant un chemin de longueur 6.
- -Donnez un graphe simple, sans boucle et non pondéré contenant un chemin de taille 5 et de longueur 40.

Relations entre les éléments d'un graphe

- L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets.
 -
 - L'arête qui joint deux sommets A et B d'un graphe non-orienté est notée A - B.
 -
 - Deux arêtes d'un graphe non-orienté sont adjacentes si elles possèdent au moins un sommet commun.
 - Deux sommets d'un graphe non-orienté sont adjacents si il existe une arête les joignant.
- Le degré d'un sommet S d'un graphe non-orienté est le nombre d'arêtes dont S est une extrémité.
- Dans un graphe non-orienté, une chaîne est une suite de sommets consécutifs reliés par des arêtes.
 - Une chaîne est dite élémentaire si elle ne comporte pas plusieurs fois le même sommet.
 -
 - Une chaîne dont le sommet de début est le même que le sommet de fin est appelée un cycle.



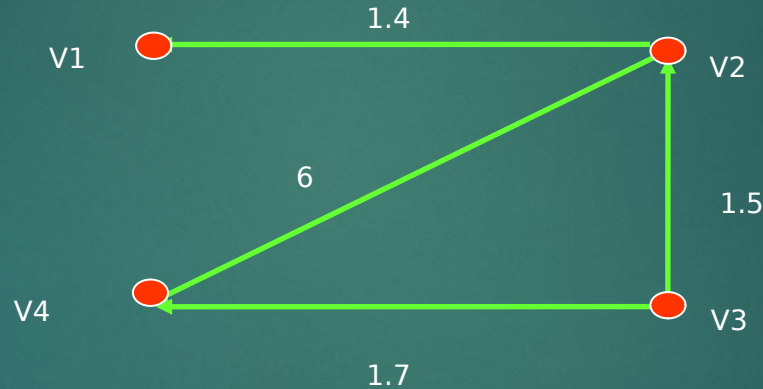
ycle

Graphique pondéré

64

Définition : Si chaque arête ou chaque sommet, ou les deux, sont associés à un nombre +ve, le graphe est appelé **graphe pondéré**.

Par exemple,



Graphique fini et infini

65

Définition : Un graphe est composé d'un nombre fini de sommets et d'un nombre fini d'arêtes. Il s'agit d'un graphe **fini**, sinon il s'agit d'un **graphe infini**.

Par exemple, le graphe $G_1 \& G_2$ est un graphe fini.

Définition : Un graphe $G=(V,E)$ est appelé **graphe étiqueté** si ses arêtes sont étiquetées avec des noms ou des données.

Par exemple, le graphe G est un graphe étiqueté.

Adjacence et incidence

66

Définition : Deux sommets v_1 & v_2 de G se rejoignent directement par au moins une arête, alors ces sommets sont appelés **sommets adjacents**.

Par exemple, dans le graphique G , v_1 & v_2 sont des sommets adjacents.

Définition : Si V_i est le sommet final de l'arête $e_{ij} = (v_i, v_j)$, l'arête e_{ij} est dite **Incidente** sur v_i . De même, l'arête e_{ij} est dite **Incidente** sur v_j .

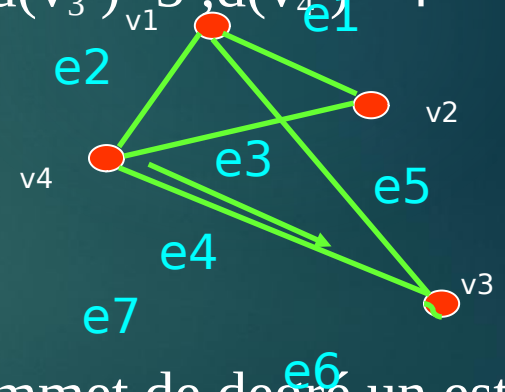
Par exemple, dans le graphique G , e_1 est incident sur v_1 & v_2 .

Degré d'un sommet

67

Définition : Le nombre d'arêtes incidentes sur un sommet v_i avec une boucle auto-comptée deux fois est appelé **degré du sommet v_i** .

Par exemple, considérons le graphe G , $d(v_1)=3$, $d(v_2)=2$, $d(v_3)=5$, $d(v_4)=4$



Définition :

Un sommet de degré zéro est appelé **sommet isolé** et un sommet de degré un est appelé **sommet pendent**.

Voisins

68

Définition : Deux sommets s_1 et s_2 sont voisins s'il existe une arête d'extrémités s_1 et s_2 .

Chaîne

Une **chaîne** de longueur n est une suite de n arêtes qui relient un sommet i à un autre j ou à lui-même.

Le nombre d'arêtes qui composent une chaîne est appelé **longueur de la chaîne**.

On appelle **chaîne fermée** toute chaîne dont l'origine et l'extrémité coïncident.

On appelle cycle toute chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.

Des chaînes de longueur 2 :

A D C

A B C

Des chaînes de longueur 3 :

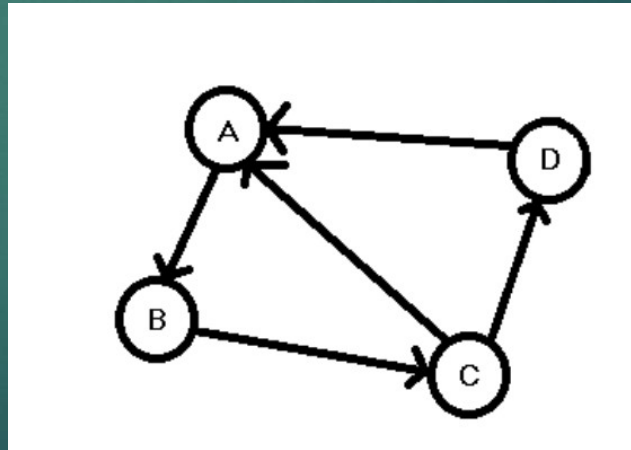
A B C D

B A D C

Des chaînes de longueur 4 :

A B C D A

A B C A D



Cycle

70

Définition :

Cycle : Un cycle est une chaîne qui permet de partir d'un sommet et revenir à ce sommet en parcourant une et une seule fois les autres

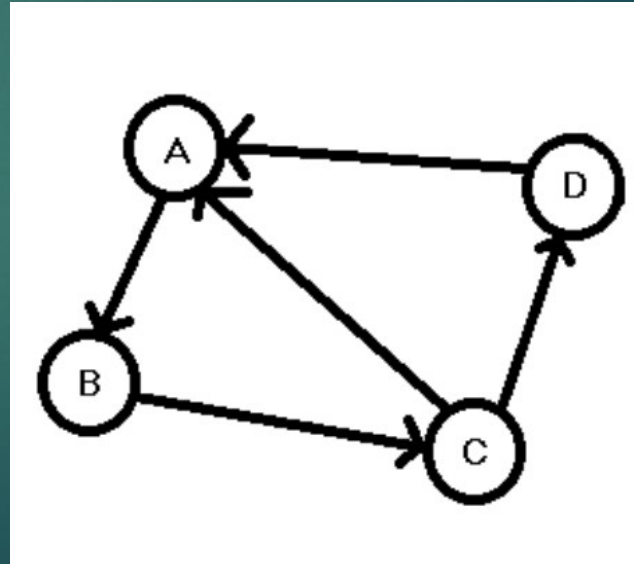
Sommets. Exemples :

A B C D A est un cycle

A B C A est un cycle

D C A D est un cycle

A B C A D C A n'est un cycle



Chemin

71

Définition :

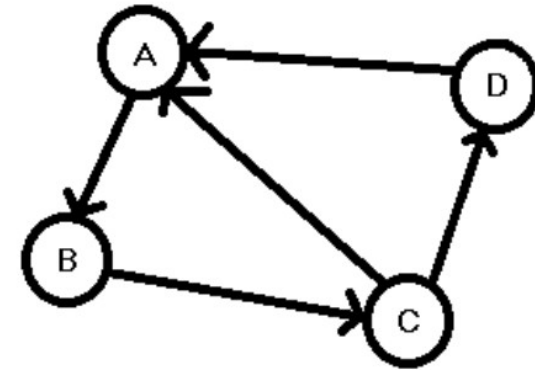
Chemin : c'est une chaîne bien orientée

Exemples :

A B C D est un chemin

A D C A B n'est pas un chemin

A B C A D n'est pas un chemin



Longueur d'un chemin

72

Définition :

Longueur du chemin (de la chaîne) : nombre d'arcs (ou arêtes) du chemin.

Distance entre deux sommets : longueur du plus petit chemin (chaîne) entre ces deux sommets.

Diamètre d'un graphe : plus grande distance entre deux sommets de ce graphe.

Ordre et taille d'un graphe

73

Définition :

On appelle **ordre d'un graphe** le nombre de ses sommets.

On appelle **taille d'un graphe** le nombre de ses arêtes.

Circuit

74

Définition :

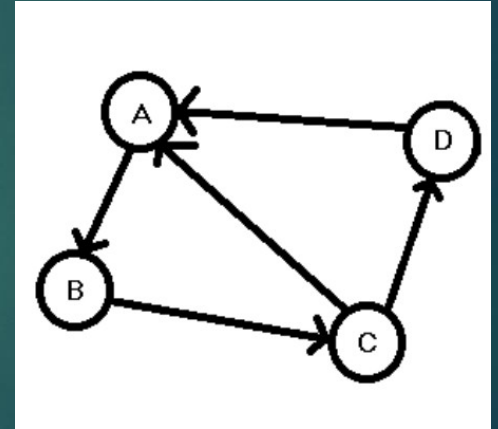
Circuit : est un cycle "bien orienté", à la fois cycle et chemin.

Exemples :

A B C A est un circuit

A B C D A es un circuit

A D C A est un cycle mais pas un circuit

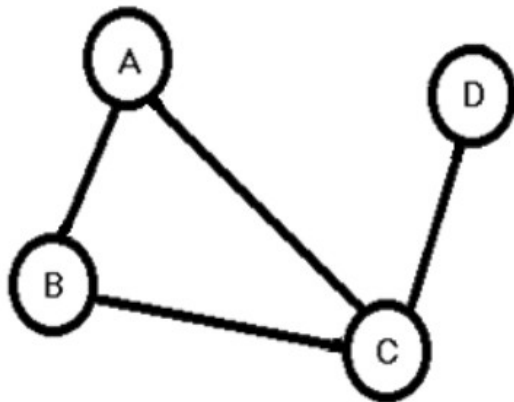


Graphe Connexe

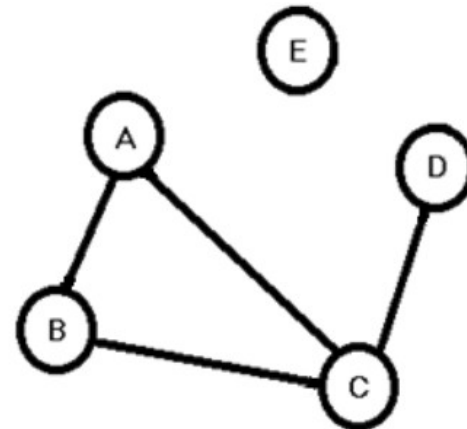
75

Définition : Un graphe connexe est un graphe dont tout couple de sommets peut être relié par une chaîne de longueur $n \geq 1$

Graphe connexe :



Graphe non connexe:



Graphe Connexe

76

Autre Définition :

Un graphe est connexe si entre deux sommets il existe toujours un chemin.

Pour un graphe orienté, il existe plusieurs notions de connexité. Un tel graphe est :

- **Faiblement connexe** si le graphe obtenu en oubliant l'orientation est connexe ;
- **fortement connexe** si, d'un sommet à un autre, il existe toujours un chemin orienté.

Représentation matricielle des graphes

77

Un graphique peut également être représenté par une matrice.

Deux méthodes sont utilisées pour la représentation matricielle du graphique,

1. **Matrice adjacente**

2. **Matrice des incidents**

1. Matrice adjacente

78

L'**A.M. du graphe G** à n sommets et sans arêtes parallèles est une matrice binaire symétrique $A(G)=[a_{ij}]$ ou d'ordre $n*n$ où,

$a_{ij}=1$, s'il existe une arête entre v_i & v_j .

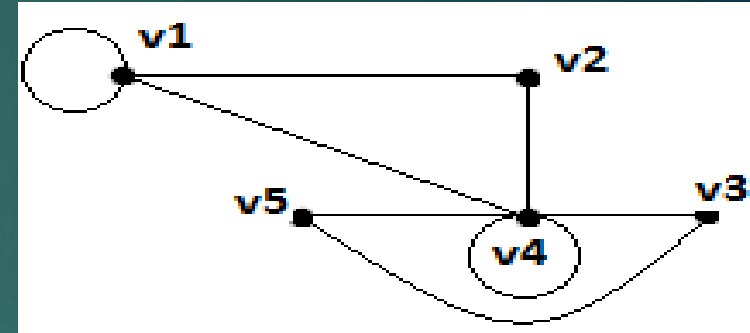
$a_{ij}=0$, si v_i & v_j ne sont pas adjacents.

Une boucle de soi au sommet v_i correspond à $=1_{.ij}$

Par exemple,

$A(G)=$

	v1	v2	v3	v4	v5
v1	1	1	0	1	0
v2	1	0	0	1	0
v3	0	0	0	1	1
v4	1	1	1	1	1
v5	0	0	1	1	0



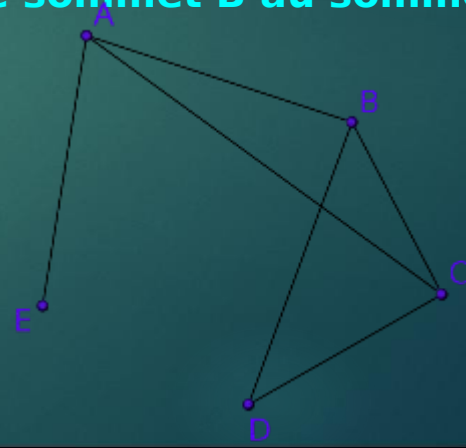
Dénombrer le nombre de chaînes de longueur k

79

Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont les sommets sont numérotés de 1 à n . Le terme a_{ij} de la matrice A^k ($k \in \mathbb{N}^*$) est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant les sommets i et j dans ce graphe.

EXEMPLE:

Combien existe-t-il de chaînes de longueur 3 reliant le sommet B au sommet C ?



Dénombrer le nombre de chaînes de longueur k

80

EXEMPLE:

Combien existe t-il de chaînes de longueur 3 reliant le sommet B au sommet C ?



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe donc 5 chaînes de longueur 3 reliant le sommet B au sommet C puisque $a_{23}=a_{32}=5$.

Liste adjacence

V1:{ V1 , V2, V4}

V2:{ V1 ,V4}

V3:{ V5 , V4}

V4:{ V1 , V2, V3,V4, V5}

V5:{ V3 , V4}

1. Matrice adjacente

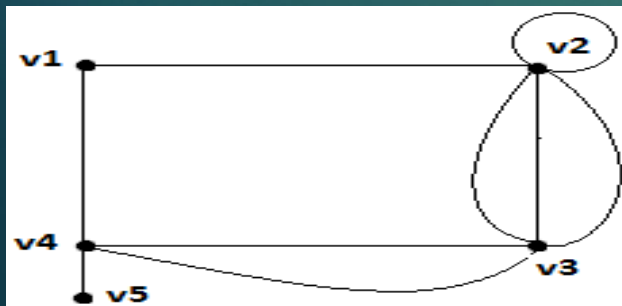
82

L'**A.M. d'un multigraphe G** à n sommets est une matrice $n \times n$ $A(G) = [a_{ij}]$ où,

$a_{ij} = N$, s'il existe une ou plusieurs arêtes entre v_i & v_j & N est le nombre d'arêtes entre v_i & v_j .

$a_{ij} = 0$, sinon.

Par exemple,



$A(G) =$

	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	0	1	0
v2	1	1	3	0	0
v3	0	3	0	2	0
v4	1	0	2	0	1
v5	0	0	0	1	0

2. Matrice des incidents

83

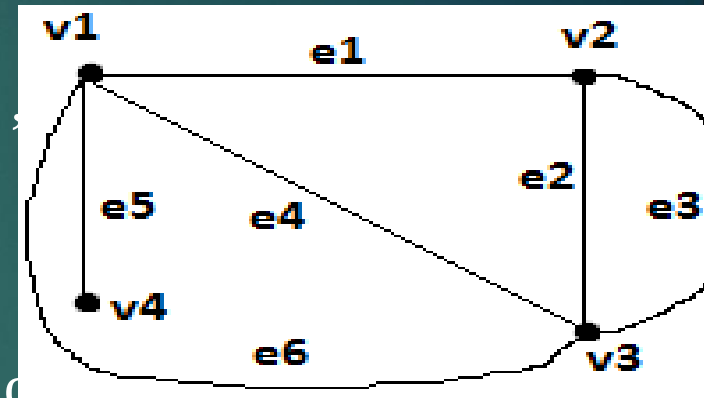
Etant donné un graphe G avec n sommets, e arêtes et pas de boucles propres.

La matrice d'incidence $x(G)=[X_{ij}]$ de l'autre graphe G est une matrice $n \times e$ où,

$X_{ij} = 1$, si l'arête $j^{\text{th}} e_j$ est incidente sur le sommet $i^{\text{th}} v_i$,

$X_{ij} = 0$, sinon.

Ici, n sommets sont des lignes et e arêtes sont des colonnes.



$X(G)=$

	e1	e2	e3	e4	e5	e6
v1	1	0	0	1	1	1
v2	1	1	1	0	0	0
v3	0	1	1	1	0	1
v4	0	0	0	0	1	0

Graphique orienté ou Diagraphie

84

Définition : Si chaque arête du graphe G a une direction, le graphe est appelé **diapgraphe**.

Dans un graphe à arêtes dirigées, le **degré d'entrée d'**un sommet v , désigné par **deg⁻(v)** et le **degré de sortie de** v , désigné par **deg⁺(v)**.

Graphique orienté ou Diagraphie

85

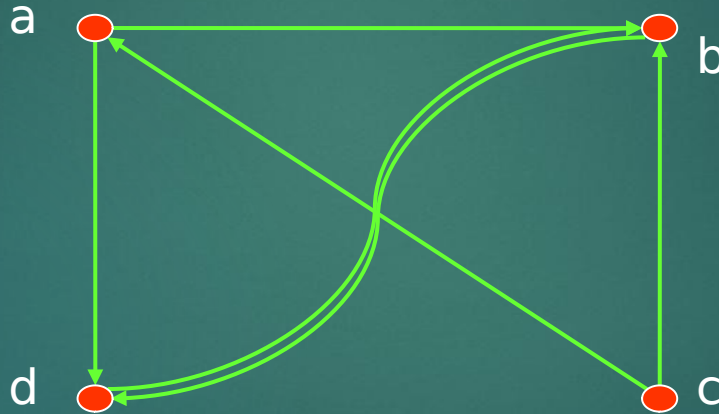
Exemple : Quels sont les degrés intérieurs et extérieurs des sommets a, b, c, d de ce graphique :

$$\deg^{-}(a) = 1$$

$$\deg^{+}(a) = 2$$

$$\deg^{-}(d) = 2$$

$$\deg^{+}(d) = 1$$



$$\deg^{-}(b) = 4$$

$$\deg^{+}(b) = 2$$

$$\deg^{-}(c) = 0$$

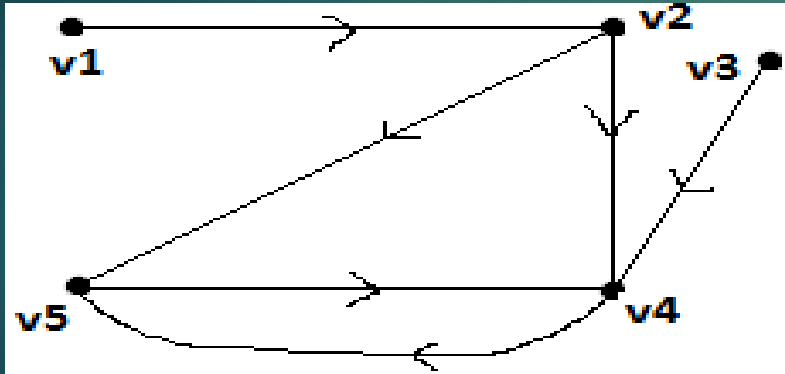
$$\deg^{+}(c) = 2$$

Matrice d'adjacence d'un diagraphe

86

Il est défini de la même manière que pour les graphes non dirigés.

Par exemple,



	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	0	0	0
v2	0	0	0	1	1
v3	0	0	0	1	0
v4	0	0	0	0	1
v5	0	0	0	1	0

Liste d'adjacence



La liste d'adjacence est une autre façon de représenter un graphe. Plutôt que d'utiliser une matrice, on stocke pour chaque nœud la liste de ses nœuds voisins (c'est-à-dire les nœuds reliés par une arête). Cette représentation est plus compacte que la matrice d'adjacence, en particulier pour les graphes creux (où il y a peu d'arêtes par rapport au nombre de nœuds). Elle permet également une exploration plus efficace du graphe, car on peut facilement accéder aux voisins d'un nœud donné. Voici un exemple de liste d'adjacence pour un graphe à 4 nœuds :

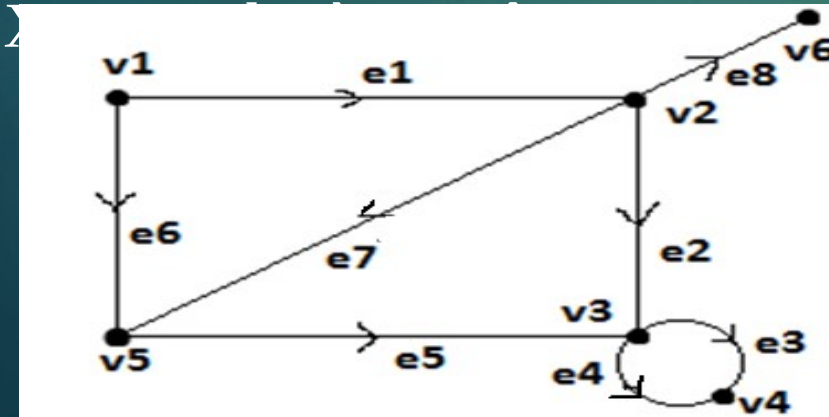
A: B, D
B: A, C
C: B, D
D: A, C

Matrice incidente du diagraphe

88

Etant donné un graphe G avec n , e et pas de boucles propres, la matrice $x(G)=[X_{ij}]$ ou l'ordre $n \times e$ où n sommets sont des lignes et e arêtes sont des colonnes telles que, $X_{ij} = 1$, si la j ème arête e_j est incidente **sur** i^{th} vertex v_i

$X_{ij} = -1$, si la j ème arête e_j est incidente **dans** i^{th} vertex v_i



	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8
v1	1	0	0	0	0	1	0	0
v2	-1	1	0	0	0	0	1	1
v3	0	-1	1	1	-1	0	0	0
v4	0	0	-1	-1	0	0	0	0
v5	0	0	0	0	1	-1	-1	0
v6	0	0	0	0	0	0	0	-1

Graphique nul

89

Définition : Si l'ensemble des arêtes d'un graphe à n sommets est un ensemble vide, alors le graphe est appelé **graphe nul**.

Il est désigné par N_n **Par exemple,**

N_3 N_4



Graphique complet

90

Définition : Soit G un graphe simple à n sommets. Si le degré de chaque sommet est $(n-1)$, le graphe est appelé **graphe complet**.

Graphique complet sur n sommets, il est noté K_n .

Dans un graphe complet K_n , le nombre d'arêtes est de

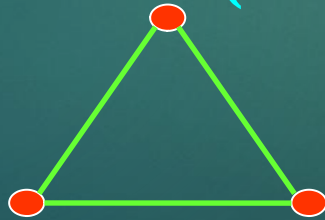
$n(n-1)/2$, par exemple,



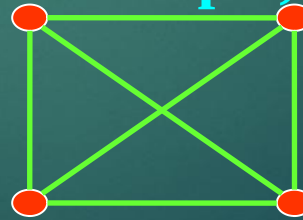
K_1



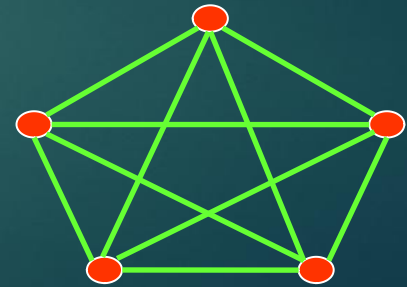
K_2



K_3



K_4



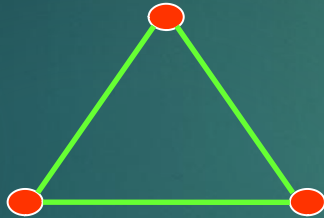
K_5

Graphique régulier

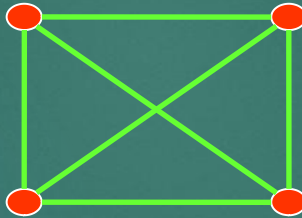
91

Définition : Si le degré de chaque sommet est identique, disons "r", dans un graphe G, on dit que le graphe est un **graphe régulier** de degré r.

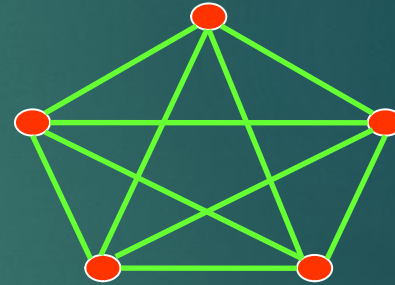
Par exemple,



K_3



K_4



K_5

Graphique bipartite

92

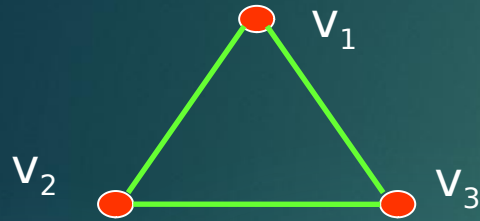
Définition : Le graphe est appelé **graphe bipartite** si son ensemble de sommets V peut être divisé en deux sous-ensembles distincts, à savoir V_1 et V_2 , de sorte que $V_1 \cup V_2 = V$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. En outre, chaque arête de G relie un sommet de V_1 à un sommet de V_2 .

Un graphe ne peut pas avoir de boucle autonome.

Graphes bipartites

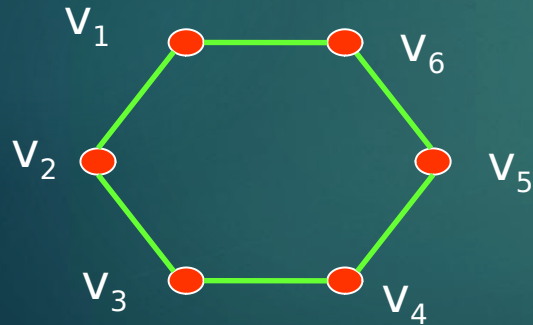
93

Exemple I : G1 est-il biparti ?

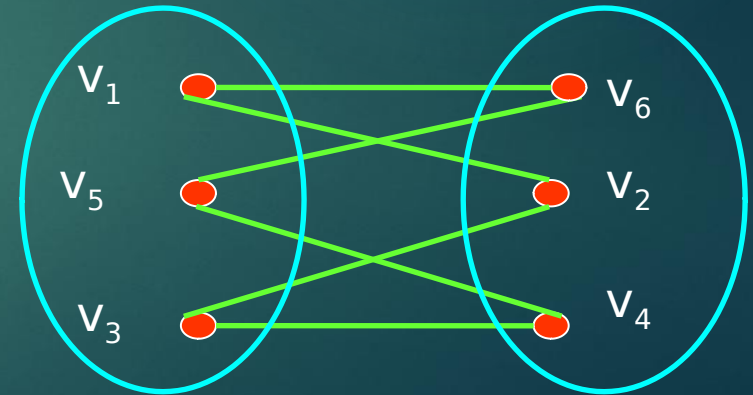


Non, car il n'existe aucun moyen de diviser les sommets en deux ensembles de manière à ce qu'il n'y ait pas d'arêtes dont les deux extrémités se trouvent dans le même ensemble.

Exemple II : G2 est-il bipartite ?



Oui, car nous pouvons afficher G2 comme suit :



Isomorphisme

94

Définition : Deux graphes sont considérés comme équivalents (**appelés isomorphes**) s'ils ont un comportement identique en termes de propriétés théoriques des graphes.

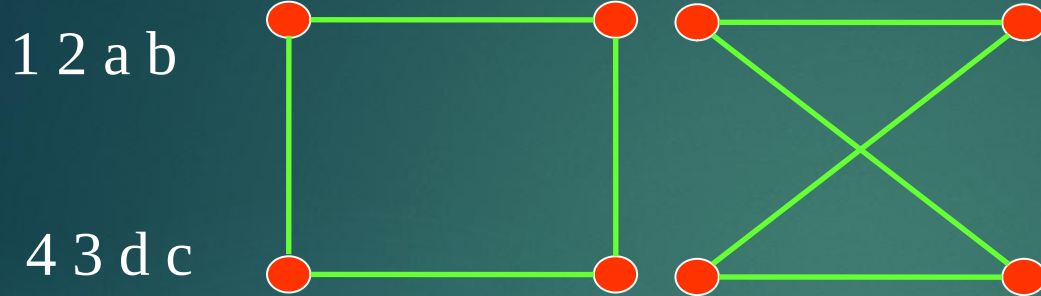
Deux graphes $G(V, E)$ & $G'(V', E')$ sont dits **isomorphes l'un à l'autre** s'il existe une correspondance univoque entre leurs sommets et entre leurs arêtes de telle sorte que la relation d'incidence soit préservée.

Il est désigné par $G_1 = G_2$

Isomorphisme

95

Par exemple,



1	a
2	b
3	d
4	c

La définition de l'isomorphisme montre immédiatement que deux graphes isomorphes doivent avoir,

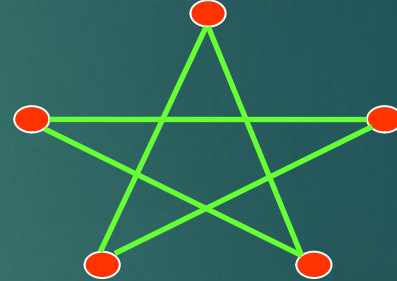
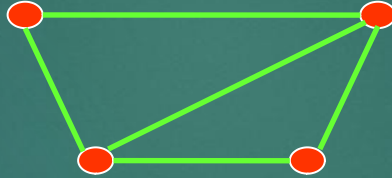
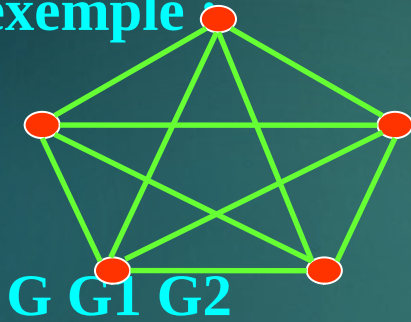
- ▶ le même nombre de sommets,
- ▶ le même nombre d'arêtes, et
- ▶ les mêmes degrés de sommets.

Sous-graphe

96

Définition : Un **sous-graphe** d'un graphe $G = (V, E)$ est un graphe $G' = (V', E')$ où $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$.

Par exemple :

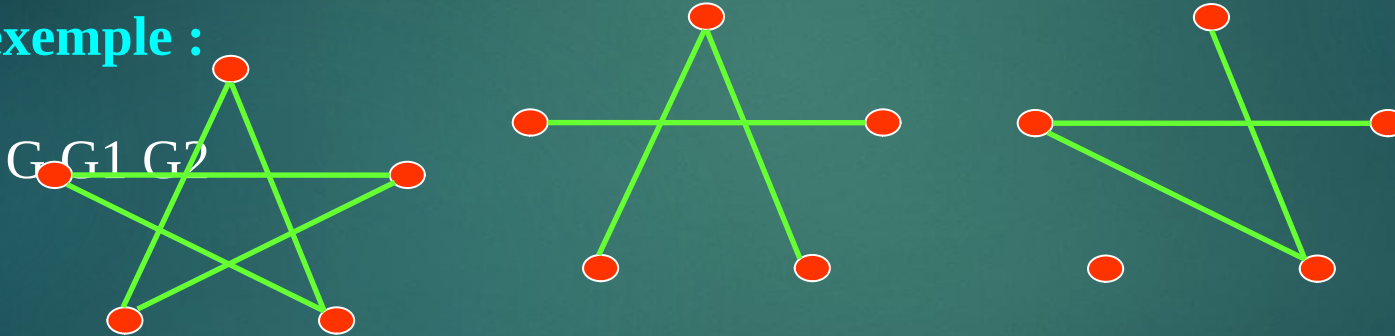


Graphique de filiation

97

Définition : Soit $G=(V, E)$ un graphe quelconque. On dit alors que G' est le **sous-graphe couvrant du graphe** G si son ensemble de sommets V' est égal à l'ensemble de sommets V de G .

Par exemple :



Arbre

98

Définition :

Pour un arbre T à n sommets il y a équivalence entre les définitions suivantes :

- T est un arbre
- T est un graphe connexe à $n-1$ arêtes
- T est un graphe acyclique à $n-1$ arêtes
- T est un graphe connexe et la suppression de toute arête le déconnecte
- T est un graphe acyclique et l'ajout de toute arête le rend cyclique.

Autrement: un arbre est graphe connexe sans cycle

Arbre1

99

Définition :

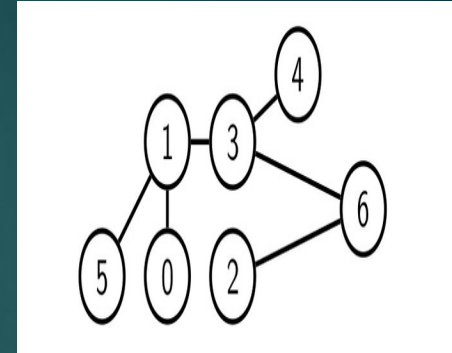
Un graphe connexe sans cycle est appelé **un arbre**.

Un graphe sans-cycle est appelé **une forêt**:

chacune de ses composantes connexes est **un arbre**.

Dès qu'on a des objets, des relations entre objets, et pas de cycle, on a donc **un arbre ou une forêt**.

Un arbre à n sommets a $n - 1$ arêtes. Ses sommets de degré 1 sont des **feuilles**.

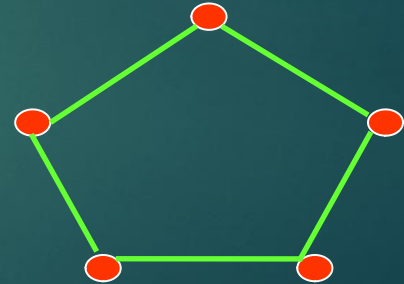
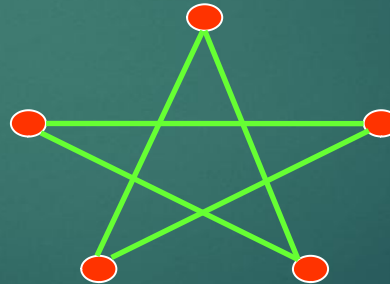
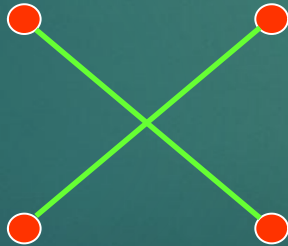
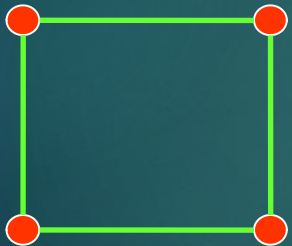


Complément d'un graphique

100

Définition : Soit G un graphe simple. Le **complément de G** , désigné par $\sim G$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est identique à celui de G et dans lequel deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans G . **Par exemple,** le graphe $\sim G$ est un graphe dont l'ensemble des sommets est identique à celui de G :

$G \sim G \quad H \sim H$

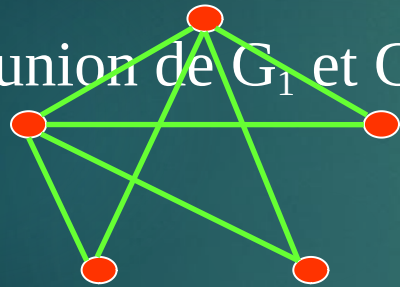


Opérations sur les graphes

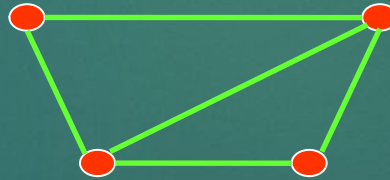
101

Définition : L'**union de** deux graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ est le graphe simple dont l'ensemble des sommets est $V_1 \cup V_2$ et l'ensemble des arêtes $E_1 \cup E_2$.

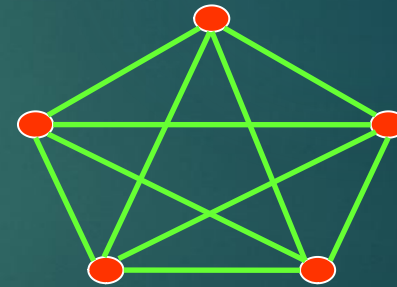
L'union de G_1 et G_2 est désignée par $G_1 \cup G_2$.



G_1



G_2



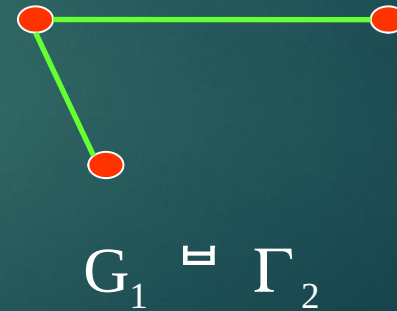
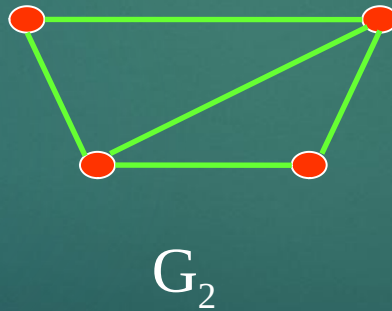
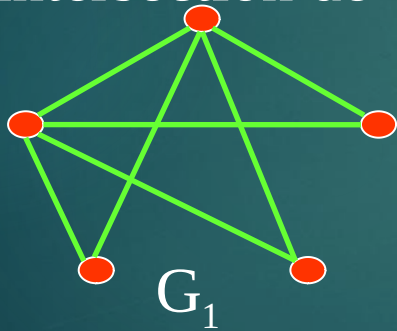
$G_1 \cup G_2$

Opérations sur les graphes

102

Définition : L'**intersection** de deux graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ est le graphe simple dont l'ensemble des sommets est $V_1 \sqcup V_2$ et l'ensemble des arêtes $E_1 \sqcap E_2$.

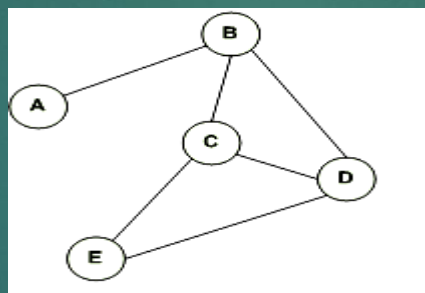
L'intersection de G_1 et G_2 est désignée par $G_1 \sqcap G_2$.



Graphique non dirigé

Un graphe non dirigé est un graphe dont les arêtes ne sont pas dirigées.

- Exemple

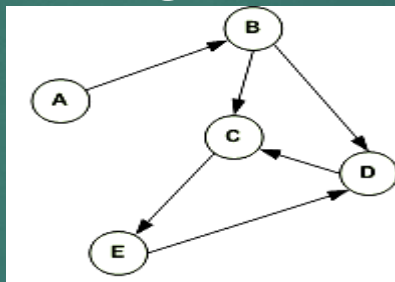


Dans le graphe ci-dessus, comme il n'y a pas d'arêtes dirigées, il s'agit d'un graphe non dirigé.

Graphique dirigé

Un graphe dirigé est un graphe dans lequel les arêtes sont dirigées par des flèches.

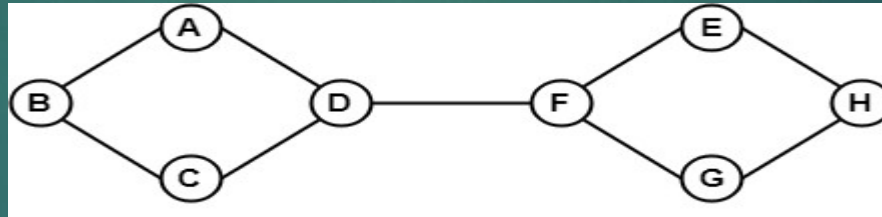
- Les graphes dirigés sont également connus sous le nom de digraphes.
- Exemple



Dans le graphique ci-dessus, chaque arête est dirigée par la flèche. Une arête dirigée a une flèche de A à B, ce qui signifie que A est lié à B, mais que B n'est pas lié à A.

Graphe connecté

- Un graphe connecté est un graphe dans lequel on peut visiter de n'importe quel sommet à n'importe quel autre sommet. Dans un graphe connecté, il existe au moins une arête ou un chemin entre chaque paire de sommets.
- Exemple

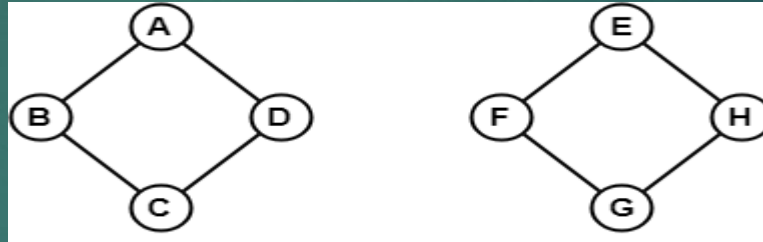


Dans l'exemple ci-dessus, nous pouvons passer de n'importe quel sommet à n'importe quel autre sommet. Cela signifie qu'il existe au moins un chemin entre chaque paire de sommets, ce qui en fait un graphe connecté.

Graphique déconnecté

- Un graphe déconnecté est un graphe dans lequel il n'existe pas de chemin entre chaque paire de sommets.

- Exemple



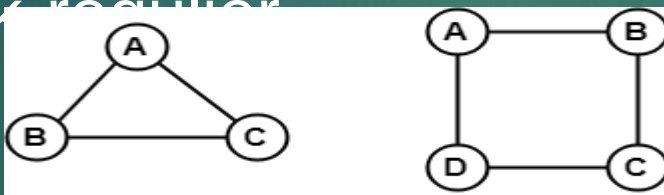
Le graphe ci-dessus est constitué de deux composantes indépendantes qui sont déconnectées. Puisqu'il n'est pas possible de se rendre des sommets d'une composante aux sommets des autres composantes, il s'agit d'un graphe déconnecté.

Graphique régulier

Un graphe régulier est un graphe dans lequel le degré de tous les sommets est le même.

- Si le degré de tous les sommets est égal à k , on parle alors de graphe k -régulier.

- Exemple



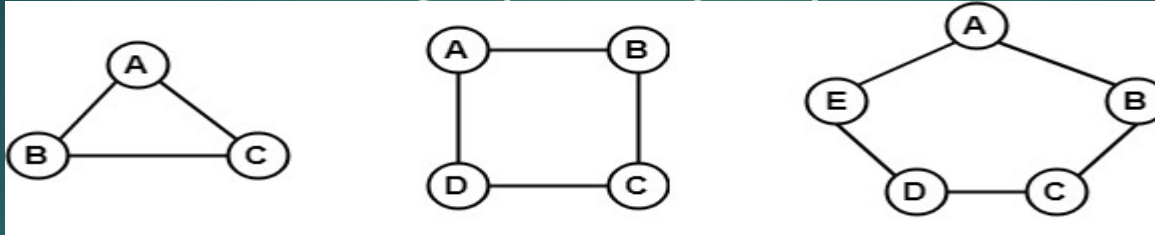
Dans l'exemple ci-dessus, tous les sommets ont un degré 2. Par conséquent, on l'appelle un graphe régulier de degré 2.

Graphique cyclique

Un graphe avec " n " sommets (où $n \geq 3$) et " n " arêtes formant un cycle de " n " avec toutes ses arêtes est appelé graphe cyclique.

- Un graphe contenant au moins un cycle est appelé graphe cyclique.
- Dans le graphe cyclique, le degré de chaque sommet est de 2.
- Le graphe cyclique qui a n sommets est désigné par C_n .
- Exemple 1

- Dans l'exemple ci-dessus, tous les sommets ont un degré 2. Ils sont donc tous des graphes cycliques.

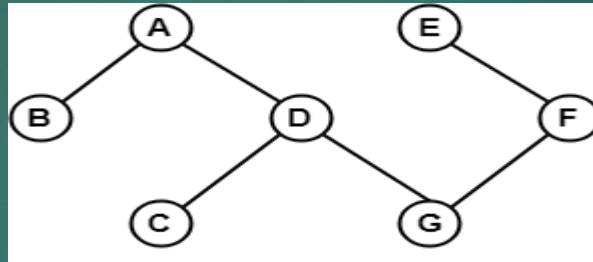


- Exemple 2
- Puisque le graphe ci-dessus contient deux cycles, il s'agit d'un graphe cyclique.

Graphique acyclique

- Un graphe qui ne contient aucun cycle est appelé graphe acyclique.

- Exemple



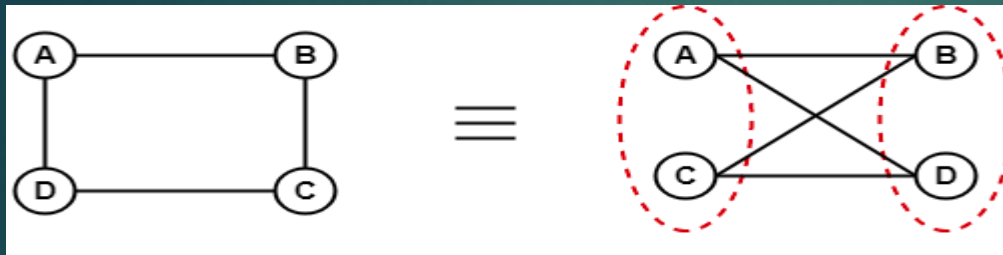
Puisque le graphe ci-dessus ne contient aucun cycle, il s'agit d'un graphe acyclique.

Graphe bipartite

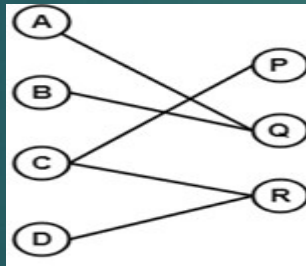


Un graphe biparti est un graphe dans lequel l'ensemble des sommets peut être divisé en deux ensembles de telle sorte que les arêtes ne vont qu'entre les ensembles, et non à l'intérieur de ceux-ci.

- Un graphe $G (V, E)$ est appelé graphe biparti si son ensemble de sommets $V(G)$ peut être décomposé en deux sous-ensembles disjoints non vides $V_1(G)$ et $V_2(G)$ de telle sorte que chaque arête $e \in E(G)$ a son premier joint dans $V_1(G)$ et son autre premier point dans $V_2(G)$.
- La partition $V = V_1 \cup V_2$ est connue sous le nom de bipartition de G .
- Exemple 1



Exemple 2



Graphes eulériens



- **Un circuit eulérien** est un circuit passant une et une seule fois par chaque arête du graphe.
- **Un graphe eulérien** est un graphe possédant un circuit eulérien.
- **Un chemin eulérien** est un chemin passant une et une seule fois par chaque arête du graphe.

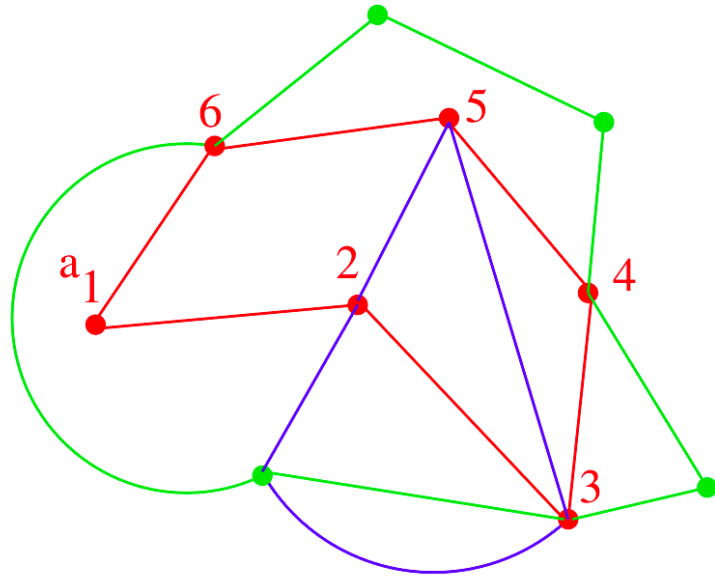
Graphes eulériens

- On suppose avoir un graphe connexe.
- Condition nécessaire
- Pour que G soit eulérien, i.e. possède un circuit eulérien,
- il est nécessaire que
- $\blacktriangle$ le degré de chaque sommet soit pair (cas non orienté)
- $\blacktriangle d^-(v) = d^+(v)$ pour tout sommet v (cas orienté)

Graphes eulériens : Théorème

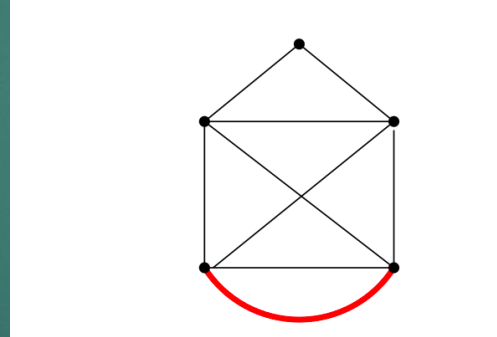
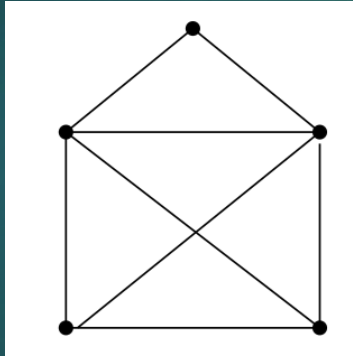
- Un multi-graphe fini non orienté connexe $G = (V, E)$ possède **un circuit eulérien SSI** le **degré de chaque sommet est pair**.

Example



CORROLAIRE 1

- Un multi-graphe non orienté connexe possède un chemin eulérien joignant deux sommets a et b SSI a et b sont les deux seuls sommets de degré impair.



CORROLAIRE 2

- Un multi-graphe non orienté connexe possède un chemin eulérien joignant deux sommets a et b SSI a et b sont les deux seuls sommets de degré impair.

Graphes hamiltoniens

- Soit $G = (V, E, \phi)$ un graphe orienté ou non. Un chemin est dit hamiltonien si il emprunte une fois et une seule chaque sommet.
- Un cycle est dit hamiltonien s'il est élémentaire et passe par tous les sommets.
-

Graphes hamiltoniens

- Soit $G = (V, E, \phi)$ un graphe orienté ou non. **Un chemin est dit hamiltonien** si il emprunte une fois et une seule chaque sommet.
- **Un cycle est dit hamiltonien** s'il est élémentaire et passe par tous les sommets.
- **Un graphe est dit hamiltonien** s'il admet un cycle hamiltonien.
-

Graphes hamiltoniens : Theoreme de Dirac

- Un graphe ayant suffisamment d'arêtes est hamiltonien :
- Théorème (G.A. Dirac)
- Soit G un graphe simple à $n \geq 3$ sommets. Supposons que tous les
- sommets sont de degré au moins $n/2$. Alors G est hamiltonien.

Graphe bipartite complet

- Un graphe biparti complet est un graphe biparti dans lequel chaque sommet du premier ensemble est relié à chaque sommet du second ensemble par exactement une arête.
- Un graphe biparti complet est un graphe biparti qui est complet.

- 
- Exercice
 - -Donnez un graphe simple, sans boucle et non pondéré contenant un chemin de taille 5.
 - -Donnez un graphe simple, sans boucle et non pondéré contenant un chemin de longueur 6.
 - -Donnez un graphe simple, sans boucle et non pondéré contenant un chemin de taille 5 et de longueur 40.

Algorithme de parcours en profondeur 1: Kosaraju



L'**algorithme de Kosaraju** est une méthode puissante pour identifier les **composantes fortement connexes (CFC)** dans un graphe dirigé. Cette approche, développée par le mathématicien et informaticien Sriramanujam Kosaraju, permet de résoudre efficacement un problème fondamental en théorie des graphes.

Algorithme de Kosaraju: Problème des composantes fortement connexes (CFC)

Dans un graphe dirigé, **les composantes fortement connexes (CFC) sont des sous-ensembles de nœuds où il existe un chemin entre chaque paire de nœuds dans le même sous-ensemble.** Autrement dit, tous les nœuds d'une CFC sont "fortement connectés" entre eux.

Algorithme de Kosaraju : description

- **L'algorithme de Kosaraju** est une approche en deux étapes pour résoudre le problème des CFC.

La première étape consiste à effectuer un parcours en profondeur (DFS) du graphe original afin de déterminer l'ordre de fin des nœuds.

- La deuxième étape implique d'inverser les arcs du graphe et d'effectuer un deuxième parcours DFS en commençant par les nœuds ayant l'ordre de fin le plus élevé. Ce second parcours permet de découvrir les CFC du graphe. **L'algorithme de Kosaraju se distingue par sa simplicité et son efficacité, avec une complexité temporelle linéaire dans le pire des cas**

Algorithme de Kosaraju : description

- Soit G un graphe. L'algorithme opère en deux
- Étapes 1 :
 1. Exécuter l'algorithme de parcours en profondeur sur G et noter le post-ordre (c'est-à-dire l'ordre suffixe, ou ordre de remontée) du parcours, puis l'inverser.
 2. Exécuter l'algorithme de parcours en profondeur sur le graphe transposé G^t de G , en suivant l'ordre donné par la première étape.
- Les arbres produits par le deuxième parcours sont les composantes fortement connexes (CFC).

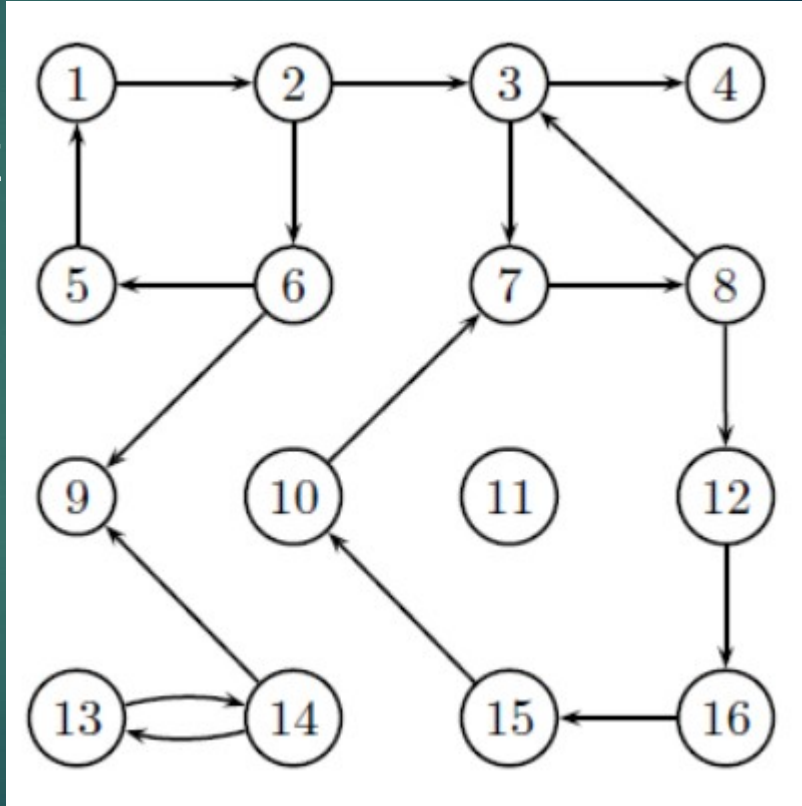
Algorithme de Kosaraju : description

- Soit G un graphe. L'algorithme opère en deux
- Étapes 1 :
 1. Exécuter l'algorithme de parcours en profondeur sur G et noter le post-ordre (c'est-à-dire l'ordre suffixe, ou ordre de remontée) du parcours, puis l'inverser.
 2. Exécuter l'algorithme de parcours en profondeur sur le graphe transposé G^t de G , en suivant l'ordre donné par la première étape.
- Les arbres produits par le deuxième parcours sont les composantes fortement connexes (CFC).

Algorithme de Kosaraju : Application

Exercice :

Trouver les composantes simplement connexes et fortement connexes du graphe orienté suivant :



- Algorithme de parcours en profondeur récursif(Dfs rec)

DFS-Rec

Input: $u, G = (V, E)$

Input-Output: Tableaux Couleur, Pere, debut, fin. Entier temps.

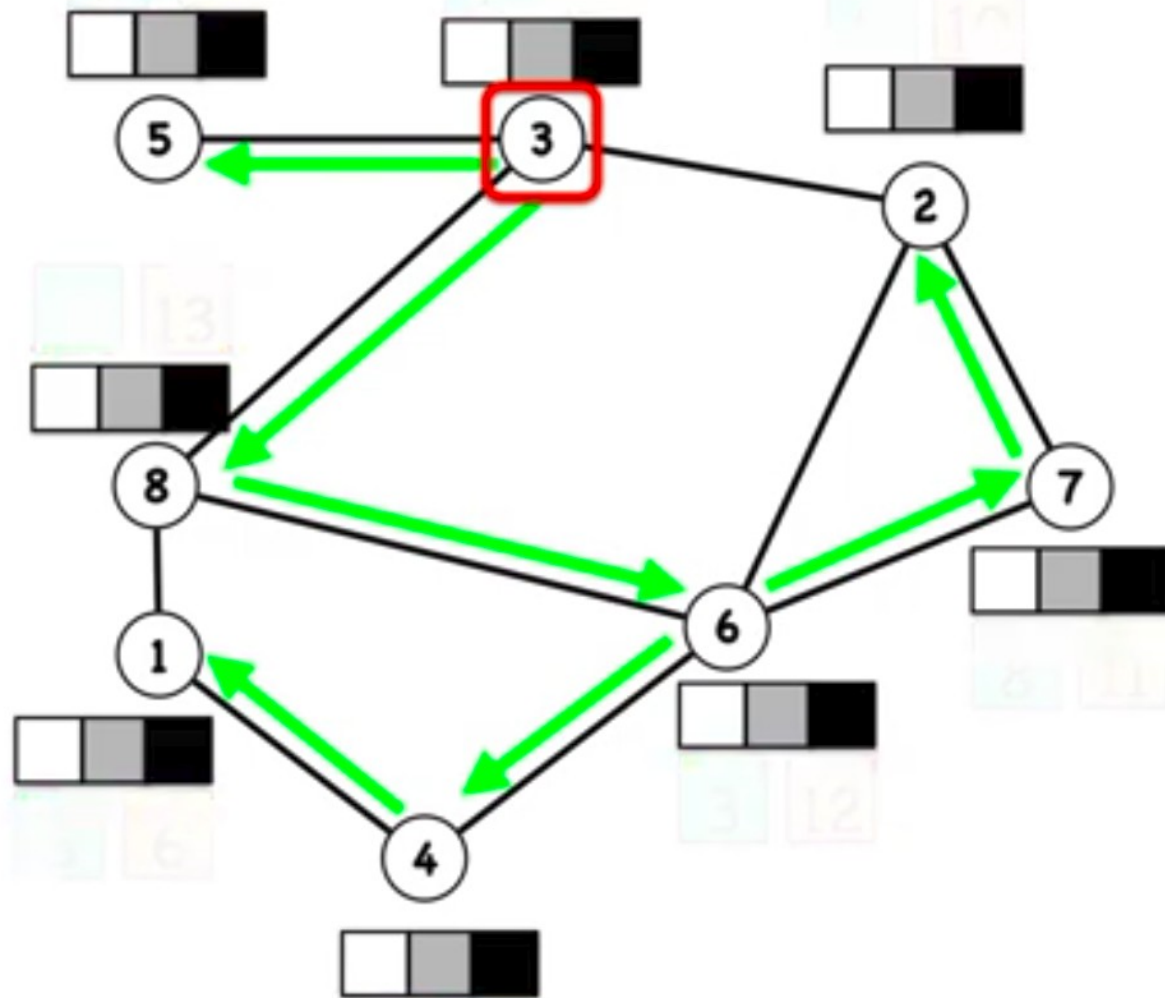
```
1  Couleur[u] := Gris;
2  temps := temps + 1;
3  debut[u] := temps;
4  Pour tout voisin v de u faire
5      Si Couleur[v] = Blanc alors
6          Pere[v] := u;
7          DFS-Rec(v);
8  Couleur[u] := Noir;
9  temps := temps + 1;
10 fin[u] := temps;
```

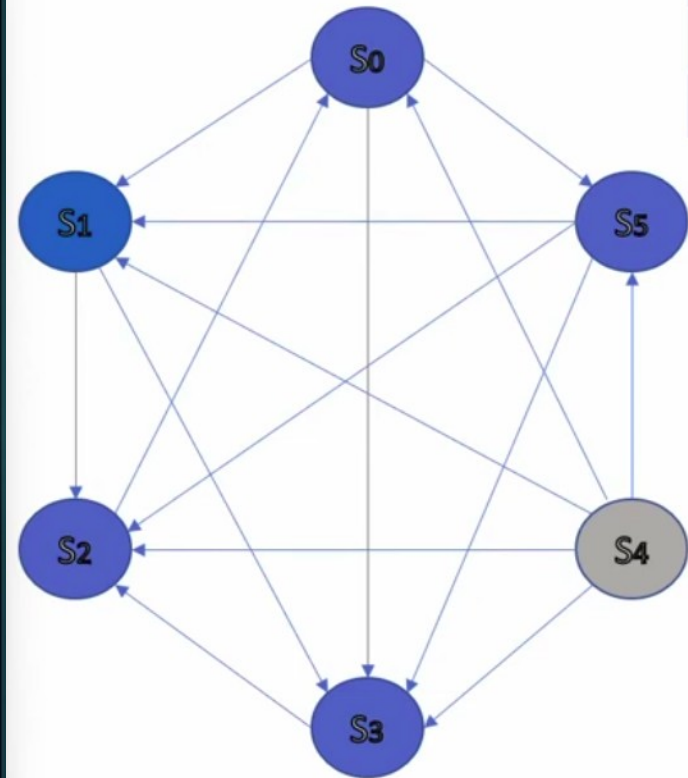
DFS-Rec

Input: $u, G = (V, E)$

Input-Output: Tableaux Couleur, Pere, debut, fin. Entier temps.

```
1  Couleur[u] := Gris;
2  temps := temps + 1;
3  debut[u] := temps;
4  Pour tout voisin v de u faire
5      Si Couleur[v] = Blanc alors
6          Pere[v] := u;
7          DFS-Rec(v);
8  Couleur[u] := Noir;
9  temps := temps + 1;
10 fin[u] := temps;
```

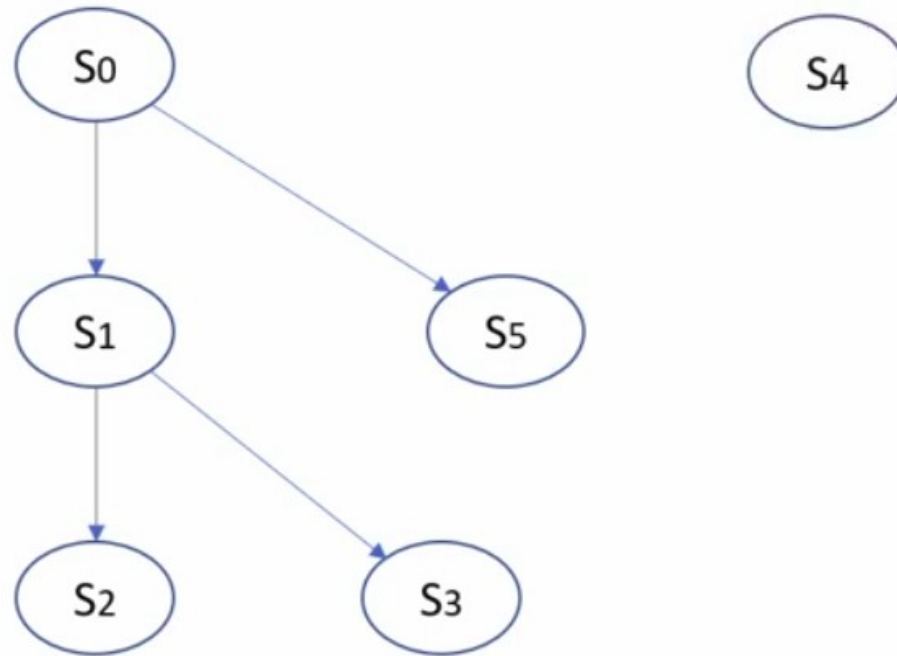




v	S0	S1	S2	S3	S4	S5
D(v)	1	2	3	5	11	8
F(v)	10	7	4	6		9
Père(v)	NIL	S0	S1	S1	NIL	S0

Pile = [S4]

v	S ₀	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
D(v)	1	2	3	5	11	8
F(v)	10	7	4	6	12	9
Père(v)	NIL	S ₀	S ₁	S ₁	NIL	S ₀



Algorithme de Bell man ford 1



- L'algorithme de Bellman-Ford est un algorithme classique utilisé pour trouver le plus court chemin entre un nœud source et tous les autres nœuds dans un graphe orienté pondéré, même en présence d'arêtes de poids négatif. Voici un plan algorithmique pour l'algorithme de Bellman-Ford

Algorithme de Bell man ford 2

- Algorithme de Bellman-Ford-Kalaba
- On veut calculer les chemins de longueur minimale dans un graphe à partir d'un sommet s en utilisant l'algorithme :
- fonction $[Dist, P_{red}] = BELLMAN(G, s)$
- Initialisation : n = nombre de sommets de G
- P_{red} = tableau des prédécesseurs initialisé à 0
- $Dist$ = tableau des distances initialisé à $+\infty$ (sauf $Dist(s) = 0$)

Algorithme de Bellman ford 2

- W = matrice des poids des arcs (∞ si l'arc n'existe pas)
- Traitement : $k = 1$
- tant que $k \leq n$ et il y a eu des modifications à l'étape précédente faire pour tout sommet x faire
 - pour tout y successeur de x faire
 - si $\text{Dist}(x) + W(x, y) < \text{Dist}(y)$
 - alors modifier $\text{Dist}(y)$ et $\text{Prede}(y) = x$
- fin
- fin faire

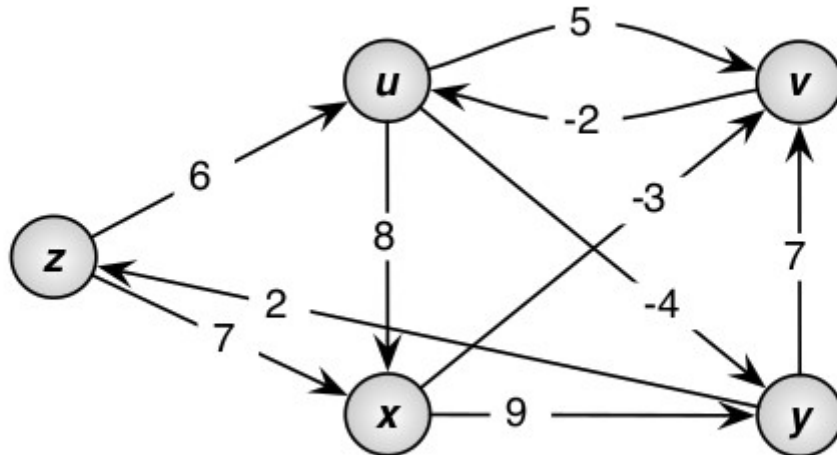
Algorithme de Bellman ford 2

Algorithme 1 Bellman-Ford(G, w, s)

```
1: pour tout sommet  $v \in V$  faire // Initialisation
2:    $d[v] \leftarrow \infty, \pi[v] \leftarrow \text{NIL}$ 
3:  $d[s] \leftarrow 0$ 
4: pour  $i$  de 1 à  $|V| - 1$  faire
5:   pour tout arc  $(u, v) \in E$  faire // relâchement de l'arc  $(u, v)$ 
6:     si  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  alors
7:        $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v), \pi[v] \leftarrow u$ 
8:   pour tout arc  $(u, v) \in E$  faire // détection des circuits négatifs
9:     si  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  alors
10:      retourner Faux
11: retourner Vrai
```

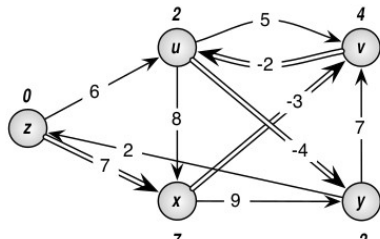
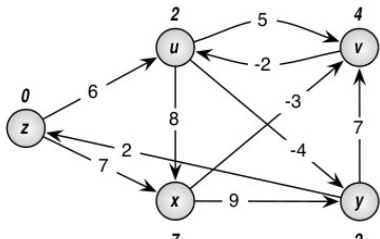
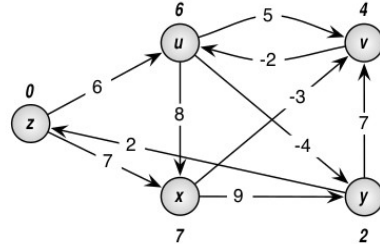
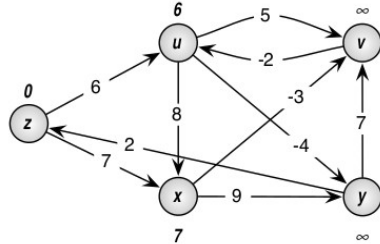
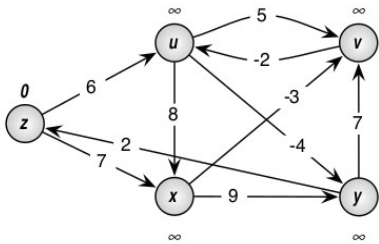
Algorithme de Bellman ford 2

- On considère le graphe ci-dessous. Faire tourner l'algorithme en prenant comme source le sommet z .
- Même question en changeant le poids de l'arc (y, v) à 4.

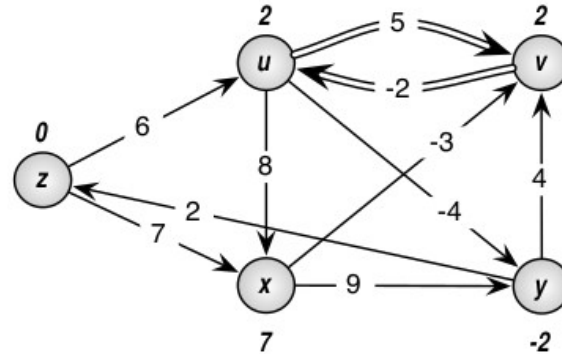
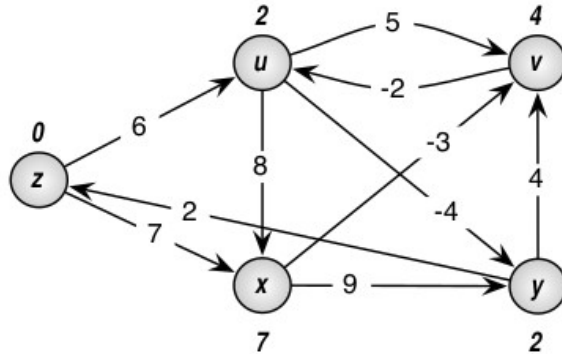
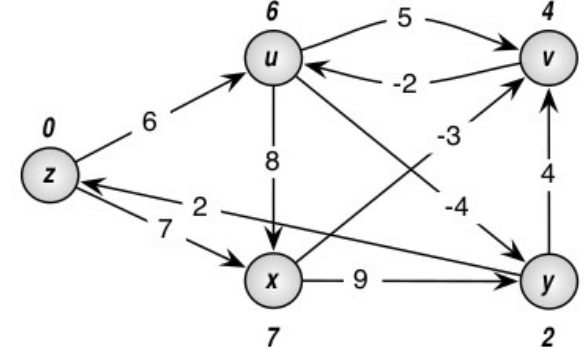
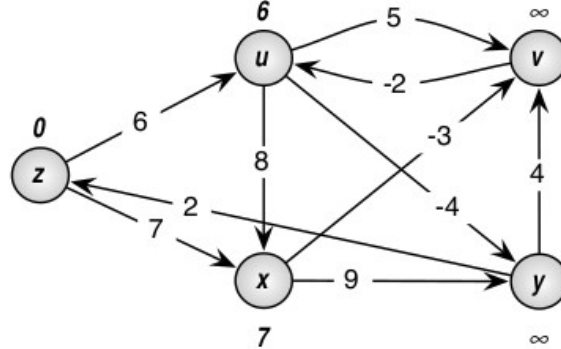
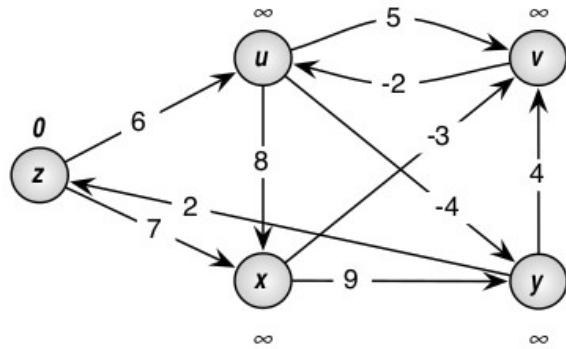


Algorithme de Bellman ford 2

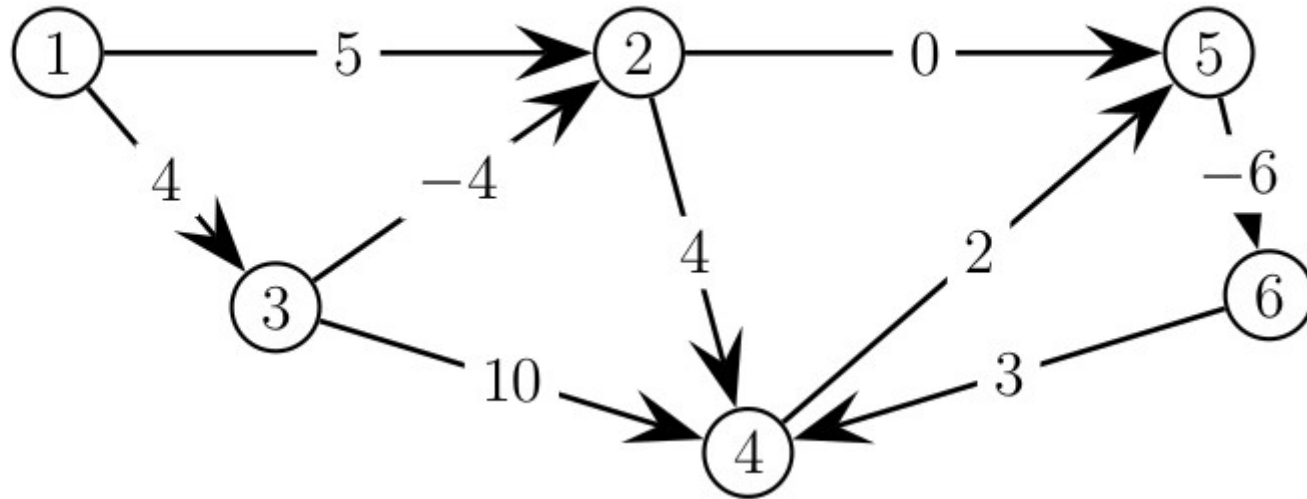
- Exemple lorsque l'algorithme tourne en considérant les arcs dans l'ordre suivant : (u, v) , (u, x) , (u, y) , (v, u) , (x, v) , (x, y) , (y, v) , (y, z) , (z, u) , (z, x)
- Avec $w(y, v) = 4$: l'algorithme renvoie faux à cause d'un circuit de poids négatif entre les sommets u et v .



Algorithme de Bellman ford 2



Algorithme de Bellman ford 3



Algorithme de Prim

- L'algorithme de Rober C. Prim permet de déterminer un arbre couvrant (il contient tout les sommets du graphe d'origine) minimal dans un graphe connexe non orienté dont les arcs son pondérés .

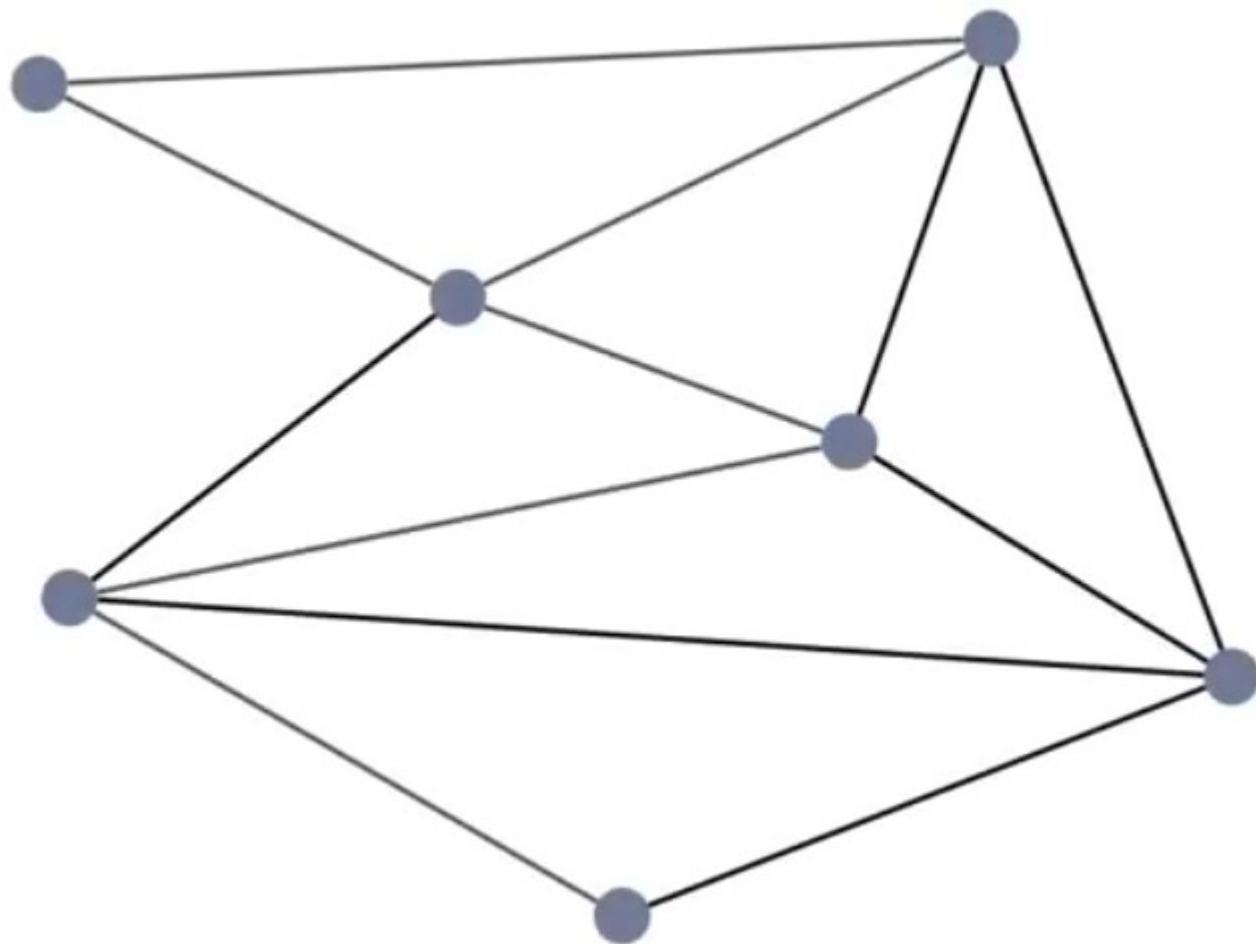
Algorithme de Prim

- Fonctionnement de l'algorithme :
- 1. Choisir un sommet initial arbitrairement et l'ajouter à **L'arbre couvrant minimal**.
- 2. Sélectionner l'arc de poids minimum qui relie un sommet inclus dans **l'arbre couvrant minimal**, puis **ajouter cet arc et le sommet non inclus à arbre**.
- 3. Répéter l'étape 2 jusqu'à ce que tous les sommets soient inclus dans **l'arbre couvrant minimal**

NB : Un graphe connexe peut comporter plusieurs arbres couvrants minimum différents, mais si tous les poids sont différents alors il est unique.

Algorithm 1: Algorithme de Prim(G,s)

```
1  $T, M \leftarrow$  graphe vide,  $\emptyset$ ;  
2  $dist, pere \leftarrow$  tableaux de taille  $n$ ;  
3 for  $i \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do  
4    $dist[i], pere[i] \leftarrow cout(s, i), s$   
5    $M \leftarrow M \cup \{i\}$ ;  
6  $M \leftarrow supprimer(M, s)$  ;  
7  $pere[i] \leftarrow -1$  ;  
8 while  $M \neq \emptyset$  do  
9    $x \leftarrow choisirmin(M, dist)$ ;  
10   $M \leftarrow supprimer(M, x)$ ;  
11   $z \leftarrow pere[x]$ ;  
12  ajouter à  $T$  l'arête  $(x, z)$  avec son coût ;  
13  for  $y$  successeur de  $x$  do  
14    if  $y \in M$  et  $cout(x, y) < dist[y]$  then  
15       $dist[y] \leftarrow cout(x, y)$ ;  
16       $pere[y] \leftarrow x$ ;  
17 return  $T$  ;
```



Exercice d'application :

Exercice 1

Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?

Exercice 2

Trois maris jaloux et leurs épouses souhaitent traverser une rivière. Ils disposent d'une barque qui ne peut transporter plus de deux personnes à la fois. Comment doivent-ils procéder, sachant qu'aucune femme ne doit rester en compagnie d'un ou deux hommes sans que son mari soit présent ?

Montrez que ce problème n'a pas de solution si les couples sont au nombre de 4.

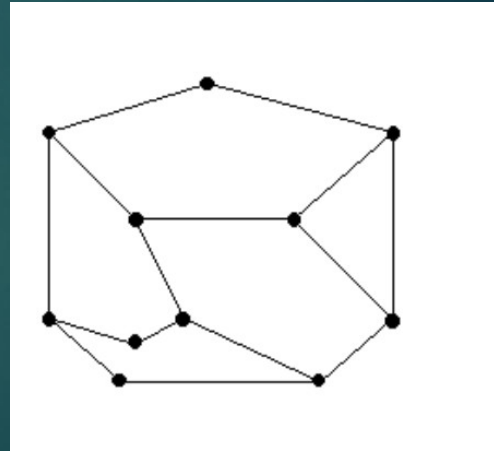
Exercice 3

On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres... Comment doit-on faire ?

Exercice 4

Le graphe ci-contre représente le plan des couloirs d'un musée. Un gardien placé dans un couloir peut surveiller les deux carrefours placés à ses extrémités. Combien de gardiens sont nécessaires (et comment les placer) afin que tous les carrefours soient surveillés ?

Si l'on place maintenant les gardiens aux carrefours, en supposant qu'un tel gardien peut surveiller tous les couloirs amenant à ce carrefour, combien de gardiens sont nécessaires ?



Exercice 5

Sept élèves, désignés par A,B,C,D,E,F et G se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise « qui à rencontré qui » (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement...).

- Quel est l'ordre d'arrivée des élèves à la bibliothèque ?
- leur ordre de départ ?

élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

Exercice 6

Trois formateurs devront donner demain un certain nombre de séances de cours pour trois groupes :

- Le premier formateur doit enseigner le premier groupe pendant 2 heures et le groupe deux pendant 1 heure;
- Le deuxième formateur doit enseigner le premier groupe pendant 1 heure, le deuxième groupe pendant 1 heure et le troisième groupe trois pendant 1 heure;
- Le troisième formateur doit enseigner le premier groupe pendant 1 heure, le deuxième groupe pendant 1 heure et le troisième groupe pendant 2 heures.

1. Propose un graphe pour représenter cette situation? Quel est le type de

2. Graphe?

3. Donner le nombre minimal des créneaux horaires?

4. En utilisant le graphe, proposer un emploi du temps